(19/2/2008)

TEMA 5: RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

Cualquier sistema lineal puede representarse como una matriz A (coeficientes de las n incógnitas) y un vector independiente b (de tantas componentes como ecuaciones):

$$\boxed{Ax = b \quad x \in \mathbb{R}^n \quad b \in \mathbb{R}^m \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right\}$$

(Vamos a considerar $m = n$, así que A será una matriz cuadrada).

→ Este sistema tiene la solución exacta: $\boxed{x = A^{-1}b}$

Sin embargo, no alcanzaremos la solución exacta, sino que nos quedaremos con una aproximación.

En este tema vamos a estudiar sistemas que presentan las siguientes características:

1º) No homogéneo → $b \neq 0$ → Vector de términos independientes: $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

2º) No singular → $|A| \neq 0$ y $\exists A^{-1}$

3º) Tiene un número elevado de ecuaciones.

4º) Se resuelve por métodos numéricos. Nunca llegaremos a la solución, sino que obtendremos una x^n aproximación del vector incógnita x:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$x^n \simeq x$

¿Qué métodos veremos para resolver estos sistemas?

* MÉTODOS DIRECTOS:

- Para resolver sistemas pequeños (< 500 ecuaciones).
- Sistemas densos (con pocos elementos nulos).
- Se producen errores de redondeo.
- Se resuelven con un número finito de operaciones.
- Veremos los siguientes métodos directos:

  * GAUSS
  * GAUSS - JORDAN
  * PIVOTAJE → PARCIAL / TOTAL

  − Eficiencia +

- Estos métodos se aplican a todo el sistema $\boxed{Ax = b}$

* MÉTODOS ITERATIVOS:

- Para resolver sistemas grandes (> 500 ecuaciones)
- Sistemas poco densos (con muchos elementos nulos).
- Se producen errores de truncamiento y redondeo.
- Para resolverlo partimos del sistema $Ax = b$ y obtenemos otro sistema equivalente de la forma $x = Bx + C$

  Obtendremos una serie de sistemas hasta alcanzar la aproximación x^n:

  x^0 arbitrario

  x^1

  $\vdots$

  $$\boxed{x^n \simeq x \;/\; x^n = Bx^{n-1} + C}$$

- Estos métodos se aplican sólo a la matriz $\boxed{A.}$

- En función de cómo sea A se aplicarán distintos métodos:

  * FACTORIZACIÓN LU → Es aplicable a todo tipo de matrices. Se trata de expresar A como producto de 2 matrices: L triangular inferior y U triangular superior.

    L ↓ Lower, U ↓ Upper

$$Ax = b \rightarrow LUx = b \qquad L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

→ Si $l_{ii} = 1$ → ALGORITMO DE DOOLITTLE.

Si $u_{ii} = 1$ → ALGORITMO DE CROUT.

  * Si la matriz es simétrica $\boxed{(A = A^T)}$ podemos hacer una factorización más sencilla:

$$A = A^T \longrightarrow A = LDL^T$$

  * Si la matriz es simétrica $(A = A^T)$ y definida positiva $\boxed{(\det A_r > 0 \quad r = 1, 2, \dots, n)}$ entonces A admite la siguiente descomposición:

$$A = LL^T \longrightarrow \text{DESCOMPOSICIÓN DE CHOLESKY}$$

  * Si la matriz es tridiagonal tiene una descomposición especial utilizando el criterio de Crout $(u_{ii} = 1)$.

    → Una matriz tridiagonal es aquella que sólo tiene no nulas la diagonal principal y una diagonal por encima y debajo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

0. CONCEPTOS PREVIOS.

* MATRIZ ESTRICTAMENTE DOMINANTE EN LA DIAGONAL:

Una matriz es estrictamente dominante en la diagonal si en cada fila el valor absoluto del elemento de la diagonal es mayor que la suma de los valores absolutos de los otros elementos de la fila:

$$|a_{ii}| > |a_{i1}| + |a_{i2}| + \ldots = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij}$$

* MATRIZ DEFINIDA POSITIVA:

Tenemos 2 criterios para definirla:

a) STEVENS → Una matriz es definida positiva si todos sus mayores principales son positivos:

$$\det A_r > 0 \quad r = 1, \ldots, n$$

b) Una matriz es definida positiva si cumple:

$$\langle x, Ax \rangle = x^T A x > 0 \quad \forall x \neq 0$$

* MATRIZ SIMÉTRICA ESTRICTAMENTE DEFINIDA POSITIVA:

Una matriz es estrictamente definida positiva si sólo se alcanza el 0 con el vector nulo $x = 0$

$$\langle x, Ax \rangle = x^T A x = 0 \implies x = 0$$

* MATRIZ SIMÉTRICA SEMI-DEFINIDA POSITIVA:

A es semi-definida positiva si se anula para vectores no nulos:

$$\langle x, Ax \rangle = x^T A x \geq 0 \quad \forall x \neq 0$$

* ESPECTRO DE UNA MATRIZ:

El espectro de una matriz A es el conjunto de sus autovalores:

$$\sigma(A) = \{\lambda_i(A)\}$$

* RADIO ESPECTRAL DE UNA MATRIZ:

Se denomina radio espectral de una matriz A al valor máximo (en módulo) de sus autovalores:

$$\rho(A) = \max\{|\lambda_i|\}$$

Se cumple que es menor o igual que cualquier norma de la matriz:

$$\rho(A) \leqslant \|A\|$$

* NORMAS DE UN VECTOR:

Una norma vectorial es una aplicación que a cada vector en $\mathbb{R}^n$ le asigna un valor en $\mathbb{R}^+$.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Las normas vectoriales más comunes son:

$$\boxed{\begin{aligned} \|x\|_1 &= \sum_{i=1}^{n} |x_i| \\ \|x\|_2 &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \\ \|x\|_\infty &= \max_{1<i<n} \{|x_i|\} \end{aligned}}$$

Estas normas vectoriales inducen normas matriciales.

* NORMAS DE UNA MATRIZ:

Una norma matricial es una aplicación que a cada matriz de $\mathbb{R}^{n\times n}$ le asigna un valor $\mathbb{R}^+$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Las normas matriciales más comunes son:

$$\boxed{\begin{aligned} \|A\|_1 &= \max_j \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right) = \max\{\text{suma en columna}\} \\ \|A\|_2 &= \sqrt{\rho(A^T A)} \\ \|A\|_\infty &= \max_i \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right) = \max\{\text{suma en fila}\} \end{aligned}}$$

Sumo por columnas y me quedo con el máximo.

Sumo por filas y me quedo con el máximo.

EJEMPLO:

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. Hallar sus normas:

Suma por columnas $\rightarrow 3 + |-2| = 5 \;;\; |-1| + 2 = 3 \rightarrow \|A\|_1 = \max\{5,3\} = \underline{\underline{5}}$

Suma por filas $\rightarrow 3 + |-1| = 4 \;;\; |-2| + 2 = 4 \rightarrow \|A\|_\infty = \max\{4,4\} = \underline{\underline{4}}$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -7 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$$

Hallamos los autovalores $\rightarrow \begin{vmatrix} 13-\lambda & -7 \\ -7 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 16 - 18\lambda + \lambda^2 = 0 \;;\; \begin{array}{l} \lambda_1 = 17'06 \\ \lambda_2 = 0'9 \end{array}$

$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)} = \sqrt{17'06} = \underline{\underline{4'13}}$

* CONDICIONAMIENTO DE UNA MATRIZ:

Un número de condicionamiento alto implica que pequeñas perturbaciones en b pueden provocar grandes inexactitudes en la resolución del problema.

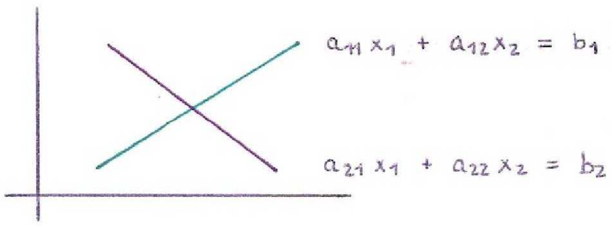
$$\boxed{K(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|}$$ → Podemos utilizar cualquier norma: 1, 2, ∞

- A <u>bien</u> condicionada ⇒ $K(A) = 1$ ⇒ Se da en el caso de Sistemas Ortogonales.

  ↳ Sistema bien condicionado ⇒ No tendré problemas para hallar la solución.

MATRIZ ORTOGONAL: $A^{-1} = A^T$

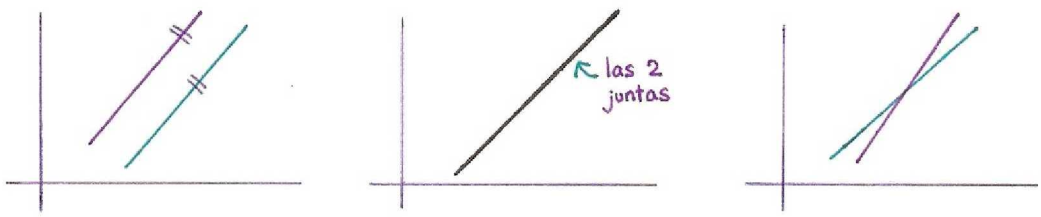
$AA^T = I$



- A <u>mal</u> condicionada ⇒ $K(A) >>> 1$ (bastante mayor que 1).

  ↳ PEOR CUANTO MAYOR SEA K.

Entonces en el sistema podrá ocurrir lo siguiente:



RECTAS PARALELAS (∄ solución) | RECTAS COINCIDENTES (Son la misma recta) | RECTAS MUY JUNTAS (Difícil de resolver).

Sistema mal condicionado ⇒ Muchas imprecisiones en la solución.

1. MÉTODO DE GAUSS.

No suele caer en exámenes.

El método de eliminación de Gauss consiste en pasar del sistema inicial que queremos resolver a otro más fácil:

$$Ax = b \implies Ux = b^*$$

Triangular superior

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ & & & \vdots \\ 0 & & & a'_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix}$$

* **Sistemas fáciles de resolver:**

→ TRIANGULAR INFERIOR:

$$Lx = b'$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

RESOLUCIÓN PROGRESIVA:

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$$

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1}{a_{22}} \qquad x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j}{a_{ii}}$$

→ TRIANGULAR SUPERIOR:

$$Ux = b'$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ & & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ & 0 & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

RESOLUCIÓN PROGRESIVA REGRESIVA:

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} \qquad\qquad x_i = \frac{b_i - \sum_{j+1}^{n} a_{ij} x_j}{a_{ii}}$$

→ DIAGONAL:

$$Dx = b'$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & & 0 \\ & a_{22} & & & \\ & & a_{33} & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

SE RESUELVEN DIRECTAMENTE:

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} \qquad x_2 = \frac{b_2}{a_{22}} \qquad x_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$$

$$Ax = b \xrightarrow[\text{PERMITIDAS}]{\text{OPERACIONES}} \begin{cases} Ux = b' \\ Lx = b' \\ Dx = b' \end{cases}$$

* Operaciones permitidas: Aquellas que no alteran el valor del determinante.

① Cambiar la fila i por la j: $\boxed{E_i \leftrightarrow E_j}$

$$
\begin{aligned}
E_1 &: a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
E_2 &: a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\
E_i &: a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i \\
E_j &: a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n = b_j
\end{aligned}
$$

② $\boxed{E_i \leftrightarrow \lambda E_i \qquad E_i \leftrightarrow \frac{1}{\lambda} E_i}$ $\quad \lambda \neq 0$

③ Combinación lineal $\rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} E_i \leftrightarrow E_j \pm \lambda E_i \\ E_i \leftrightarrow E_j \pm \frac{1}{\lambda} E_i \end{array}}$

(20/2/2008)

Continuamos con el Método de Gauss, que es el primer método de resolución de sistemas de ecuaciones lineales que estamos estudiando.

Tenemos el sistema $Ax = b$ tal que:

$$
\begin{aligned}
E_1 &: a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
E_2 &: a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\
E_3 &: a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\
&\vdots \hspace{6cm} \vdots \\
E_n &: a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n
\end{aligned}
$$

$$Ax = b \iff Ux = b^*$$

$|A| \neq 0$ $\qquad$ $\hookrightarrow$ Triangular superior.

El Método de Gauss es un método directo. Se aplica a todo el sistema. Por ello utilizaremos la matriz ampliada:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

* **MECANISMO:** Vamos a triangularizar superiormente.

- Suponemos $a_{11} \neq 0 \rightarrow$ Si $a_{11} = 0$ entonces $E_i \leftrightarrow E_j$ / $a_{11} \neq 0$

- Para cada fila por debajo de la fila 1 se halla el cociente entre su primer elemento (a_{i1}) y a_{11}. A continuación se resta m_{i1} veces la fila 1 a la i:

$$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} \qquad E_2' = E_2 - m_{21} E_1$$

$$m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} \qquad E_3' = E_3 - m_{31} E_1$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$m_{n1} = \frac{a_{n1}}{a_{11}} \qquad E_n' = E_n - m_{n1} E_1$$

Así conseguimos un sistema con el siguiente aspecto:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ 0 & a'_{32} & \dots & a'_{3n} & b'_3 \\ & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & a'_{n2} & \dots & a'_{nn} & b'_n \end{array}\right)$$

Hacer 0 esto

- Repetir el mismo proceso para hacer 0 los elementos correspondientes en las sucesivas columnas.

Para hacer 0 en la 2ª columna:

$a'_{22} \neq 0 \rightarrow$ Si $a'_{22} = 0$ entonces $E_i \leftrightarrow E_j \;/\; a'_{22} \neq 0$

$$m_{32} = \frac{a'_{32}}{a'_{22}} \qquad E''_3 = E'_3 - m_{32} E'_2$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$m_{n2} = \frac{a'_{n2}}{a'_{22}} \qquad E''_n = E'_n - m_{n2} E'_2$$

Generalizando:

$$\boxed{E'_i = E_i - m_{ij} E_j \qquad i > j}$$ GAUSS

Finalmente obtenemos una matriz triangular superior:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a'_{1n} & b_1 \\ & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ & & a''_{33} & & a''_{3n} & b''_3 \\ & 0 & & \ddots & & \vdots \\ & & & & a^*_{nn} & b_n \end{array}\right)}_{A} \rightarrow (U|b^*)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a'_{1n} \\ & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2n} \\ & & a''_{33} & \dots & a''_{3n} \\ & 0 & & \ddots & \vdots \\ & & & & a^*_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b''_3 \\ \vdots \\ b^*_n \end{pmatrix} \rightarrow Ux = b^*$$

De aquí puedo resolver:

$$\boxed{x_n = \frac{b^*_n}{a^*_{nn}} \qquad x_i = \frac{b_i - \sum_{j+1}^{n} a_{ij} x_j}{a_{ii}}}$$

* EJERCICIO:

Resolver por Gauss el siguiente sistema y dar la solución con un decimal:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 11 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 6 \end{array}\right\}$$

Lo primero es poner la matriz ampliada:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 11 \\ 2 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 6 \end{array}\right)$$

Vamos a hacer 0 esto.

$a_{11} = 1 \neq 0$

$$\left.\begin{array}{ll} m_{21} = \dfrac{a_{21}}{a_{11}} = \dfrac{2}{1} = 2 & E_2' = E_2 - 2E_1 \\ m_{31} = \dfrac{a_{31}}{a_{11}} = \dfrac{4}{1} = 4 & E_3' = E_3 - 4E_1 \end{array}\right\} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 11 \\ 0 & 1 & -6 & -19 \\ 0 & -7 & -17 & -38 \end{array}\right)$$

Vamos a hacer 0 esto.

$a_{22}' = 1 \neq 0$

$$\left. m_{32} = \dfrac{a_{32}'}{a_{22}'} = \dfrac{-7}{1} = -7 \quad E_3'' = E_3' + 7E_2' \right\} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 11 \\ 0 & 1 & -6 & -19 \\ 0 & 0 & -59 & -171 \end{array}\right)$$

Ya es triangular superior (U).

$$\boxed{Ax = b \iff Ux = b^*}$$

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 11 \\ x_2 - 6x_3 = -19 \\ -59x_3 = -171 \end{array}\right\}$$

$x_3 = \dfrac{-171}{-59} = 2'9$

$x_2 = -1'6 \qquad x_1 = 2'6$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 2'6 \\ -1'6 \\ 2'9 \end{pmatrix}$$

GAUSS es bueno para hallar el determinante, pero es costoso computacionalmente. Tiene muchos errores de redondeo y es inestable (no converge bien).

2. MÉTODO DE GAUSS-JORDAN.

El método de eliminación de Gauss - Jordan es una variante del método de Gauss. Ahora obtendremos, a partir del sistema inicial, un sistema diagonal (cuya resolución es inmediata):

$$Ax = b \iff \underbrace{D}_{\text{Diagonal}}x = b^*$$

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & & \\ & & a_{33} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Para poder aplicar el método se debe cumplir que: $|A| \neq 0$

¿Cómo llegar a un sistema diagonal? De la misma forma que hacíamos con Gauss, pero procesando también las filas por encima de la diagonal:

$$\boxed{E_i' = E_i - m_{ij}E_j \quad i \neq j}$$ GAUSS-JORDAN

* 1^er^ PASO → Hacer 0 la primera columna (excepto el elemento pivote).

pivote

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

0

$a_{11} \neq 0 \rightarrow$ Si $a_{11} = 0$ entonces $E_i \leftrightarrow E_j \ / \ a_{11} \neq 0$

$$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} \qquad E_2' = E_2 - m_{21}E_1 \rightarrow a_{21} = 0$$

$$m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} \qquad E_3' = E_3 - m_{31}E_1 \rightarrow a_{31} = 0$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$m_{n1} = \frac{a_{n1}}{a_{11}} \qquad E_n' = E_n - m_{n1}E_1 \rightarrow a_{n1} = 0$$

Aplico esto hasta tener todo 0 en la primera columna.

* 2º PASO → Hacer 0 la segunda columna (excepto el elemento pivote):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}' & a_{23}' & \dots & a_{2n}' & b_2' \\ 0 & a_{32}' & a_{33}' & \dots & a_{3n}' & b_3' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}' & a_{n3}' & \dots & a_{nn}' & b_n' \end{array}\right)$$

$a_{22}' \neq 0$

$$m_{12} = \frac{a_{12}}{a_{22}'} \qquad E_1'' = E_1 - m_{12}E_2' \rightarrow a_{12} = 0$$

$$m_{32} = \frac{a_{32}'}{a_{22}'} \qquad E_3'' = E_3' - m_{32}E_2' \rightarrow a_{32} = 0$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$m_{n2} = \frac{a_{n2}'}{a_{22}'} \qquad E_n'' = E_n' - m_{n2}E_2' \rightarrow a_{n2} = 0$$

* Aplicamos la fórmula de Gauss-Jordan hasta obtener la matriz diagonal:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22}' & & & \\ & & a_{33}'' & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_{nn}^{*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{*-1} \\ b_2^{*-1} \\ b_3^{*-1} \\ \vdots \\ b_n^{*-1} \end{pmatrix}$$

Se resuelve directamente:

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$$

$$x_2 = \frac{b_2'}{a_{22}}$$

$$x_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$$

GAUSS - JORDAN es mejor que Gauss para hallar determinantes. Además, G-J es buenísimo para calcular la inversa de una matriz.

* INVERSA DE UNA MATRIZ:

$$\boxed{(A|I) \xleftrightarrow{G-J} (I|A^{-1})}$$

$$\underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}_{A} \Bigg| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I}}_{\text{Matriz A ampliada con la serie de vectores canónicos.}} \xleftrightarrow{G-J} \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I} \Bigg| \underbrace{\begin{matrix} a^{-1}_{11} & a^{-1}_{12} & a^{-1}_{13} \\ a^{-1}_{21} & a^{-1}_{22} & a^{-1}_{23} \\ a^{-1}_{31} & a^{-1}_{32} & a^{-1}_{33} \end{matrix}}_{A^{-1}}\right)$$

* EJEMPLO: Comprobar si el sistema está bien condicionado o no:

$$\left.\begin{aligned} x - y &= 1 \\ x - 10y &= 2 \end{aligned}\right\}$$

Vamos a comprobar la condición: ¿ $\boxed{K(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = 1}$?

Si vemos que un coeficiente es mucho mayor o mucho menor que los demás coeficientes, CUIDADO! Es probable que esté mal condicionado.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -10 \end{pmatrix} \qquad (A \mid I) \xleftrightarrow{\text{Gauss - Jordan}} (I \mid A^{-1})$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -10 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad a_{11} = 1 \neq 0 \rightarrow m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{1}{1} = 1 \ ;$$

$$E_2' = E_2 - m_{21} E_1 \ ; \ E_2' = E_2 - E_1$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -9 & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad a_{22} = -9 \neq 0 \rightarrow m_{12} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{-1}{-9} = \frac{1}{9}$$

$$E_1' = E_1 - m_{12} E' \ ; \ E_1' = E_1 - \frac{1}{9} E_2'$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 10/9 & -1/9 \\ 0 & -9 & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad E_2 \leftrightarrow \frac{E_2}{-9}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 10/9 & -1/9 \\ 0 & 1 & 1/9 & -1/9 \end{array}\right) \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 10/9 & -1/9 \\ 1/9 & -1/9 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{}_{I} \qquad \underbrace{}_{A^{-1}}$$

Para hallar $K(A)$ podemos utilizar cualquier norma. Usaré $\|.\|_\infty$

$A \Rightarrow$ Suma por filas $\Rightarrow 1 + |-1| = 2 \ ; \ 1 + |-10| = 11$

$$\|A\|_\infty = \text{máx}\{2, 11\} = 11$$

$A^{-1} \Rightarrow$ Suma por filas $\Rightarrow \frac{10}{9} + \left|\frac{-1}{9}\right| = \frac{11}{9} \ ; \ \frac{1}{9} + \left|\frac{-1}{9}\right| = \frac{2}{9}$

$$\|A^{-1}\|_\infty = \text{máx}\left\{\frac{11}{9}, \frac{2}{9}\right\} = \frac{11}{9}$$

$K(A) = \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty = 11 \cdot \frac{11}{9} = \frac{121}{9} >>>> 1 \Rightarrow$ EL SISTEMA ESTÁ MAL CONDICIONADO.

(21/2/2008)

3. GAUSS CON PIVOTAJE.

Hasta ahora utilizábamos como elemento pivote el elemento a_{rr} en el paso r ($a_{11}, a_{22}, \dots$). Otra opción es, antes de hacer nada, elegir el "mejor" pivote posible y ponerlo en el lugar adecuado mediante permutaciones.

* **PIVOTAJE PARCIAL:** Busca el mejor pivote sólo entre los elementos de la misma columna que estamos tratando.

$$\boxed{\text{PARCIAL} \rightarrow \max |a_{ir}| \quad i \geq r}$$

Si estamos en el paso r, los pivotes deben buscarse entre las filas r a n. Si no, estropearíamos la parte triangular conseguida hasta el momento.

Ejemplo:

* PASO 1 → Para hacer 0s en la primera columna, buscaremos el pivote en:

$\downarrow$
$r=1$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

* PASO 2 → Para hacer 0s en la segunda columna, buscaremos el pivote en:

$\downarrow$
$r=2$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Y así sucesivamente.

→ Una vez escogido el pivote óptimo, simplemente hay que permutar la fila r por la fila del nuevo pivote. Al tratarse de una permutación de filas, la solución no cambia.

* **PIVOTAJE TOTAL:** Busca el pivote óptimo en todas las columnas de r a n de las filas de r a n.

$$\boxed{\text{TOTAL} \rightarrow \text{máx } |a_{ij}| \quad i \geq r,\ j \geq r}$$

En este caso también hay que buscarlo en las filas y columnas no tratadas aún para no estropear lo que llevamos hecho.

Ejemplo:

* PASO 1 → Para hacer 0s la primera columna busco el pivote en:
$r=1$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

* PASO 2 → Para hacer 0s la segunda columna busco el pivote en:
$r=2$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Y así sucesivamente.

→ Una vez elegido el a_{ij} como nuevo pivote hay que intercambiar las filas i y r, y las columnas j y r. Al haber una permutación de columnas hay que tenerlo en cuenta, pues supone una permutación en las incógnitas (componentes de la solución).

* ¿Cuándo se aplica una estrategia de pivotaje?

- Si $a_{ii} = 0$
- Si $a_{ii} \simeq 0$
- Si a_{ii} es muy pequeño o muy grande respecto a los demás.

* EJEMPLO:

Resolver el siguiente sistema utilizando PIVOTAJE TOTAL:

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 2 \\ 2x + 3y + 4z = -1 \\ 3x + 4y + 6z = 1 \end{array}\right\}$$

El sistema da lugar a la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Buscar el pivote aquí}$$

$$a_{11} = \max |a_{ij}| = a_{33} = 6$$

$E_3 \leftrightarrow E_1$

$C_3 \leftrightarrow C_1$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left.\begin{array}{l} 6z + 4y + 3x = 1 \\ 4z + 3y + 2x = -1 \\ 3z + 2y + x = 2 \end{array}\right\}$$

Hacer 0

Vemos que el cambio de las columnas ha alterado el orden de las incógnitas.

$$a_{11} = 6 \neq 0$$

$$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{4}{6} \qquad E_2' = E_2 - \frac{4}{6} E_1$$

$$m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \qquad E_3' = E_3 - \frac{1}{2} E_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1/3 & 0 & -5/3 \\ 0 & 0 & -1/2 & 3/2 \end{array}\right)$$

Ya es triangular superior: $Ux = b^*$

$$U = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} ; \quad b^* = \begin{pmatrix} 1 \\ -5/3 \\ 3/2 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 6z + 4y + 3x = 1 \\ \frac{1}{3}y = -\frac{5}{3} \\ -\frac{1}{2}x = \frac{3}{2} \end{array}\right\}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x = -3 \\ y = -5 \\ z = 5 \end{array}}$$

¡RECORDAR QUE LAS INCÓGNITAS HABÍAN CAMBIADO DE ORDEN!

4. FACTORIZACIÓN LU.

Resolver un sistema de ecuaciones lineales por factorización LU consiste en expresar la matriz de coeficientes A como producto de una triangular inferior (L) y una triangular superior (U).

Entonces, para cualquier vector b el problema $Ax = b$ se reduce a resolver 2 sistemas triangulares:

$$Ax = b \longrightarrow LUx = b \longrightarrow L\underbrace{(Ux)}_{y} = b$$

$$y = Ux \begin{cases} 1^{\circ}) \text{ Resolver } Ly = b \rightarrow \text{Hallo } y \\ 2^{\circ}) \text{ Resolver } Ux = y \rightarrow \text{Hallo } x \quad (x = A^{-1}b) \end{cases}$$

Existen 2 algoritmos para hallar la factorización LU:

- Doolittle.
- Crout.

4.1. DOOLITTLE.

Consiste en asumir que los $l_{ii} = 1$ y $u_{ii} \neq 0$.

$u_{1j} = a_{1j} \quad j = 1, \dots, n$
$l_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{u_{11}} \quad i = 2, \dots, n$
$l_{ij} = \dfrac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot u_{kj}}{u_{jj}} \quad i > j \;,\; j = 2, \dots, n$
$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj} \quad j \geq i \quad j = 2, \dots, n$

ECUACIONES GENERALES DEL MÉTODO DOOLITTLE.

$A = L \cdot U$ | $l_{ii} = 1$, $u_{ii} \neq 0$, $|A| \neq 0$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & \\ l_{21} & 1 & \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ & u_{22} & u_{23} \\ & & u_{33} \end{pmatrix}}_{U}$$

1º (1ª FILA DE L) x (TODA U) ← Aún no he tachado nada

$1 \cdot u_{11} = a_{11} \rightarrow u_{11} = a_{11}$ → 1ª fila x 1ª columna

$1 \cdot u_{12} = a_{12} \rightarrow u_{12} = a_{12}$ → 1ª fila x 2ª columna

$1 \cdot u_{13} = a_{13} \rightarrow u_{13} = a_{13}$ → 1ª fila x 3ª columna

LA PRIMERA FILA DE U ES IDÉNTICA A LA DE LA ORIGINAL

2º (L - 1ª FILA) x (1ª COLUMNA DE U) ← Lo que llevo tachado

$l_{21} \cdot u_{11} = a_{21} \rightarrow l_{21} = \dfrac{a_{21}}{u_{11}}$

$l_{31} \cdot u_{11} = a_{31} \rightarrow l_{31} = \dfrac{a_{31}}{u_{11}}$

3º (2ª FILA DE L) x (U - 1ª COLUMNA) ← Lo que llevo tachado

$l_{21} \cdot u_{12} + u_{22} = a_{22} \rightarrow u_{22} = a_{22} - l_{21} \cdot u_{12}$

$l_{21} \cdot u_{13} + u_{23} = a_{23} \rightarrow u_{23} = a_{23} - l_{21} \cdot u_{13}$

4º (L - 1ª y 2ª FILA) x (2ª COLUMNA DE U)

$l_{31} \cdot u_{12} + l_{32} \cdot u_{22} = a_{32} \rightarrow l_{32} = \dfrac{a_{32} - l_{31} \cdot u_{12}}{u_{22}}$

5º (3ª FILA DE L) x (U - 1ª y 2ª COLUMNA).

$l_{31} \cdot u_{13} + l_{32} \cdot u_{23} + u_{33} = a_{33} \rightarrow u_{33} = a_{33} - l_{31} u_{13} - l_{32} u_{23}$

6º Ya he hallado todos los elementos de L y U. Sólo falta resolver los 2 sistemas para hallar la solución x:

$Ly = b$; $Ux = y$

$\Downarrow$ Hallo y ; $\Downarrow$ Hallo $\underline{\underline{x}}$

* EJEMPLO:

Dado el sistema $Ax=b$, donde: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Descomponer A en el producto de dos matrices: L (triangular inferior) y U (triangular superior) aplicando el algoritmo de Doolittle.

Doolittle $\Rightarrow |A| \neq 0$, $l_{ii} = 1$, $u_{ii} \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ l_{21} & 1 & \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ & u_{22} & u_{23} \\ & & u_{33} \end{pmatrix}$$

1º (1ª FILA DE L) x (TODA U)

$1 \cdot u_{11} = a_{11} = 1 \rightarrow u_{11} = 1$

$1 \cdot u_{12} = a_{12} = 1 \rightarrow u_{12} = 1$

$1 \cdot u_{13} = a_{13} = 2 \rightarrow u_{13} = 2$

2º (L - 1ª FILA) x (1ª COLUMNA DE U).

$l_{21} \cdot u_{11} = a_{21} = -1 ;\ l_{21} \cdot 1 = -1 \rightarrow l_{21} = -1$

$l_{31} \cdot u_{11} = a_{31} = 2 ;\ l_{31} \cdot 1 = 2 \rightarrow l_{31} = 2$

3º (2ª FILA DE L) x (U - 1ª COLUMNA)

$l_{21} \cdot u_{12} + u_{22} = a_{22} ;\ -1 \cdot 1 + u_{22} = 0 \rightarrow u_{22} = 1$

$l_{21} \cdot u_{13} + u_{23} = a_{23} ;\ -1 \cdot 2 + u_{23} = 1 \rightarrow u_{23} = 3$

4º (L - 1ª y 2ª FILA) x (2ª COLUMNA DE U).

$l_{31} \cdot u_{12} + l_{32} \cdot u_{22} = a_{32} ;\ 2 \cdot 1 + l_{32} \cdot 1 = 1 \rightarrow l_{32} = -1$

5º (3ª FILA DE L) x (U - 1ª y 2ª COLUMNA)

$l_{31} \cdot u_{13} + l_{32} \cdot u_{23} + u_{33} = a_{33} ;\ 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 + u_{33} = -1 \rightarrow u_{33} = -2$

6º Ya tengo L y U. Plantear los sistemas.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & \\ -1 & 1 & \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ & 1 & 3 \\ & & -2 \end{pmatrix}}_{U} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x}}_{y} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b}$$

Ly = b

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ -1 & 1 & \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolución progresiva:

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = 1 \\ -y_1 + y_2 = 0 \ ; \ -1 + y_2 = 0 \ ; \ y_2 = 1 \\ 2y_1 - y_2 + y_3 = 0 \ ; \ 2.1 - 1 + y_3 = 0 \ ; \ y_3 = -1 \end{array}\right\} \ y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ux = y

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ & 1 & 3 \\ & & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Resolución progresiva regresiva:

$$\left.\begin{array}{l} x_3 = \dfrac{1}{2} \\ x_2 + 3x_3 = 1 \ ; \ x_2 + \dfrac{3}{2} = 1 \ ; \ x_2 = -\dfrac{1}{2} \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \ ; \ x_1 - \dfrac{1}{2} + 1 = 1 \ ; \ x_1 = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \ \underline{\underline{x}} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$\downarrow$

Solución de $Ax = b$

4.2. CROUT.

Consiste en asumir que los $u_{ii} = 1$ y $l_{ii} \neq 0$.

$$\boxed{A = L.U \quad u_{ii} = 1 \quad l_{ii} \neq 0 \quad |A| \neq 0}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} l_{11} & & \\ l_{21} & l_{22} & \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ & 1 & u_{23} \\ & & 1 \end{pmatrix}}_{U}$$

Vamos a ver los pasos con un ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & & \\ l_{21} & l_{22} & \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ & 1 & u_{23} \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

← Aún no he tachado nada.

1º (1ª COLUMNA DE U) × (TODA L)

$1.\, l_{11} = a_{11} \rightarrow l_{11} = 1 \rightarrow$ 1ª fila × 1ª columna

$1.\, l_{21} = a_{21} \rightarrow l_{21} = 3 \rightarrow$ 2ª fila × 1ª columna

$1.\, l_{31} = a_{31} \rightarrow l_{31} = 1 \rightarrow$ 3ª fila × 1ª columna

LA PRIMERA COLUMNA DE L ES IDÉNTICA A LA DE LA ORIGINAL.

← - lo que llevo tachado

2º (U - 1ª COLUMNA) × (1ª FILA DE L)

$l_{11} . u_{12} = a_{12}$; $1 . u_{12} = 1 \rightarrow u_{12} = 1$

$l_{11} . u_{13} = a_{13}$; $1 . u_{13} = 0 \rightarrow u_{13} = 0$

← - lo que llevo tachado

3º (2ª COLUMNA DE U) × (L - 1ª FILA)

$l_{21} \cdot u_{12} + l_{22} \cdot 1 = a_{22}$; $3 . 1 + l_{22} . 1 = 2 \rightarrow l_{22} = -1$

$l_{31} . u_{12} + l_{32} \cdot 1 = a_{32}$; $1 . 1 + l_{32} \cdot 1 = 1 \rightarrow l_{32} = 0$

4º (U - 1ª y 2ª COLUMNA) × (2ª FILA DE L).

$l_{21} \cdot u_{13} + l_{22} \cdot u_{23} = a_{23}$; $3 . 0 - 1 . u_{23} = 1 \rightarrow u_{23} = -1$

→

5º (3ª COLUMNA DE U) × (L - 1ª y 2ª FILA)

$$l_{31} \cdot u_{13} + l_{32} \cdot u_{23} + l_{33} \cdot 1 = a_{33} \;;\; 1.0 + 0.(-1) + l_{33} \cdot 1 = 2 \rightarrow l_{33} = 2$$

6º Ya he hallado todos los elementos de L y U. Sólo falta resolver los 2 sistemas para hallar la solución x:

$$\underset{\text{Hallo } y}{\underset{\Downarrow}{Ly = b}} \;;\; \underset{\text{Hallo } \underline{\underline{x}}}{\underset{\Downarrow}{Ux = y}}$$

$l_{i1} = a_{i1} \qquad i = 1, \dots, n$
$u_{1j} = \dfrac{a_{1j}}{l_{11}} \qquad j = 2, \dots, n$
$u_{ij} = \dfrac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj}}{l_{ii}} \qquad j > i \;,\; i = 2, \dots, n$
$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot u_{kj} \qquad i \geq j \;,\; j = 2, \dots, n$

ECUACIONES GENERALES DEL MÉTODO CROUT.

Los métodos vistos hasta ahora se pueden aplicar a cualquier matriz A no singular. Si A posee ciertas peculiaridades se puede simplificar el proceso.

5. MÉTODOS PARA MATRICES SIMÉTRICAS.

Si la matriz A del sistema $Ax = b$ es simétrica, entonces admitirá la siguiente factorización:

$A = A^T$

$$A = L.D.L^T \quad / \quad l_{ii} = 1$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A = A^T} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \\ \vdots & \vdots & & \ddots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix}}_{L} . \underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} d_{11} & & & \\ & d_{22} & & \\ & & d_{33} & \\ & & & \ddots \\ & & & & d_{nn} \end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & l_{21} & l_{31} & \dots & l_{n1} \\ & 1 & l_{32} & \dots & l_{n2} \\ & & 1 & \dots & l_{n3} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}}_{L^T}}_{U = D.L^T}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ l_{21} & 1 & & & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & 1 \end{pmatrix}}_{L} . \underbrace{\begin{pmatrix} d_{11} & d_{11}l_{21} & d_{11}l_{31} & \dots & d_{11}l_{n1} \\ & d_{22} & d_{22}l_{32} & \dots & d_{22}l_{n2} \\ & & d_{33} & \dots & d_{33}l_{n3} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & d_{nn} \end{pmatrix}}_{U}$$

$$A = L.U \quad / \quad l_{ii} = 1$$

Esta descomposición LU que he obtenido la resuelvo por Doolittle.

5.1. DESCOMPOSICIÓN DE CHOLESKY.

¡IMPORTANTE!
CAE MUCHO EN EXAMEN.

Si A es una matriz simétrica definida positiva, entonces A admite una descomposición $A = L.L^T$, llamada descomposición de Cholesky.

- Condiciones:

a) A simétrica $\rightarrow A = A^T$.

b) A definida positiva $\rightarrow$ CRITERIO DE STEVENS: Todos los mayores principales deben ser > 0:

$$\det A_r > 0 \quad r = 1, \dots, n$$

$$a_{11} > 0 \qquad (A_1)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0 \qquad (A_2)$$

$$\vdots$$

$$|A| > 0 \qquad (A_n)$$

Comprobamos que se cumplan las condiciones. Si se cumplen, podemos aplicar el método.

$$\boxed{A = L.L^T \ / \ l_{ii} > 0}$$

DESCOMPOSICIÓN DE CHOLESKY.

Vamos a ver el proceso.

iguales (por ser L y su traspuesta)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}_{A = A^T} = \underbrace{\begin{pmatrix} \ell_{11} & & \\ \ell_{21} & \ell_{22} & \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} \end{pmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \ell_{11} & \ell_{21} & \ell_{31} \\ & \ell_{22} & \ell_{32} \\ & & \ell_{33} \end{pmatrix}}_{L^T}$$

1º (1ª FILA DE L) x (TODA L^T).

$$\ell_{11}^2 = a_{11} \longrightarrow \ell_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$\ell_{11} \cdot \ell_{21} = a_{12} = a_{21} \longrightarrow \ell_{21} = \frac{a_{21}}{\ell_{11}}$$

$$\ell_{11} \cdot \ell_{31} = a_{13} = a_{31} \longrightarrow \ell_{31} = \frac{a_{31}}{\ell_{11}}$$

2º (2º FILA DE L) x (L^T - 1ª COLUMNA)

= 1ª FILA DE L

$$\ell_{21}^2 + \ell_{22}^2 = a_{22} \longrightarrow \ell_{22} = \sqrt{a_{22} - \ell_{21}^2}$$

$$\ell_{21} \cdot \ell_{31} + \ell_{22} \cdot \ell_{32} = a_{23} = a_{32} \longrightarrow \ell_{32} = \frac{a_{32} - \ell_{21} \cdot \ell_{31}}{\ell_{22}}$$

3º (3ª FILA DE L) x (L^T - 1ª y 2ª COLUMNA).

= 2ª FILA DE L.

$$\ell_{31}^2 + \ell_{32}^2 + \ell_{33}^2 = a_{33} \longrightarrow \ell_{33} = \sqrt{a_{33} - \ell_{31}^2 - \ell_{32}^2}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \ell_{ii} > 0 & \\ \ell_{11} = \sqrt{a_{11}} \qquad \ell_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{\ell_{11}} & i = 1, \dots, n \\ \ell_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \displaystyle\sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik}^2} & i = 2, \dots, n \\ \ell_{ij} = \dfrac{a_{ij} - \displaystyle\sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik} \cdot \ell_{jk}}{\ell_{jj}} & j = i+1, \dots, n \end{array}}$$

ECUACIONES GENERALES DEL ALGORITMO DE CHOLESKY.

4º Ya hemos hallado L y L^T. Ahora hay que resolver el sistema:

$$Ax = b = L \cdot \underbrace{L^T x}_{y} = b$$

$$L^T x = y \begin{cases} Ly = b \rightarrow \text{Hallo } y \\ L^T x = y \rightarrow \text{Hallo } x \end{cases}$$

* EJERCICIO:

Resolver el siguiente sistema aplicando el algoritmo de Cholesky:

$$\left.\begin{array}{rrrl} x_1 & - x_2 & + x_3 & = 1 \\ -x_1 & + 5x_2 & + x_3 & = 1 \\ x_1 & + x_2 & + 3x_3 & = 0 \end{array}\right\}$$

Lo primero, hay que poner la matriz de coeficientes del sistema:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tengo que comprobar que se den las condiciones necesarias para poder aplicar Cholesky

a) A SIMÉTRICA $\rightarrow$ Vemos que sí.

b) A DEFINIDA POSITIVA $\rightarrow$ $\det A_r > 0 \quad r = 1, \dots, n$

$$|a_{11}| = 1 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

Se cumplen las condiciones. Podemos aplicar el método.

$$A = L.L^T \ / \ l_{ii} > 0 \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{A=A^T} = \underbrace{\begin{pmatrix} l_{11} & & \\ l_{21} & l_{22} & \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ & l_{22} & l_{32} \\ & & l_{33} \end{pmatrix}}_{L^T}$$

1º (1ª FILA DE L) x (TODA L^T).

$$l_{11}^2 = a_{11} = 1 \rightarrow l_{11} = 1$$
$$l_{11} . l_{21} = a_{12} = a_{21} = -1 \ ; \quad 1. l_{21} = -1 \rightarrow l_{21} = -1$$
$$l_{11} . l_{31} = a_{13} = a_{31} = 1 \ ; \quad 1. l_{31} = 1 \rightarrow l_{31} = 1$$

2º (2ª FILA DE L) x (L^T - 1ª COLUMNA)

$$l_{21}^2 + l_{22}^2 = a_{22} = 5 \ ; \quad (-1)^2 + l_{22}^2 = 5 \rightarrow l_{22} = 2$$
$$l_{21} . l_{31} + l_{22} l_{32} = a_{23} = a_{32} = 1 \ ; \quad -1.1 + 2. l_{32} = 1 \rightarrow l_{32} = 1$$

3º (3ª FILA DE L) x (L^T - 1ª y 2ª COLUMNA).

$$l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 = a_{33} = 3 \ ; \quad 1^2 + 1^2 + l_{33}^2 = 3 \rightarrow l_{33} = 1$$

4º Resolver los sistemas:

$$Ax = b \Rightarrow L.L^T x = b \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & \\ -1 & 2 & \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ & 2 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}}_{L^T} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x}}_{y} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b}$$

Resolvemos en 2 pasos $\begin{cases} Ly = b \Rightarrow y \\ L^T x = y \Rightarrow \underline{\underline{x}} \end{cases}$

$Ly = b$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ -1 & 2 & \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolución progresiva:

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = 1 \\ -y_1 + 2y_2 = 1 \;;\; -1 + 2y_2 = 1 \;;\; y_2 = 1 \\ y_1 + y_2 + y_3 = 0 \;;\; 1 + 1 + y_3 = 0 \;;\; y_3 = -2 \end{array}\right\} y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$L^T x = y$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ & 2 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Resolución progresiva regresiva:

$$\left.\begin{array}{l} x_3 = -2 \\ 2x_2 + x_3 = 1 \;;\; 2x_2 - 2 = 1 \;;\; x_2 = 3/2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \;;\; x_1 - 3/2 - 2 = 1 \;;\; x_1 = 9/2 \end{array}\right\} \underline{\underline{x}} = \begin{pmatrix} 9/2 \\ 3/2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Solución de $Ax = b$

6. RESOLUCIÓN DE SISTEMAS TRIDIAGONALES.

¿Cómo se resuelve un sistema tridiagonal por métodos directos?

Una matriz es tridiagonal si sólo tiene no nulas la diagonal principal y una diagonal por encima y debajo.

Si la matriz A es tridiagonal se descompone por el método de Crout:

$$\underline{\text{CROUT}} \Rightarrow A = L \cdot U \ / \ u_{ii} = 1$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & c_1 & & & & \\ b_2 & a_2 & c_2 & & & \\ & b_3 & a_3 & c_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & c_{n-1} \\ & & & & b_n & a_n \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ \beta_2 & \alpha_2 & & \\ & \beta_3 & \alpha_3 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \beta_n \ \alpha_n \end{pmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \gamma_1 & & \\ & 1 & \gamma_2 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 \ \ \gamma_n \end{pmatrix}}_{U}$$

- **Condiciones.-** La matriz A admite este tipo de descomposición si cumple:

  → $|a_1| > |c_1| > 0$

  → $|a_k| \geq |b_k| + |c_k| \qquad b_k \cdot c_k \neq 0 \quad k = 2, \dots, n$

  → $|a_n| > |b_n| > 0$

7. CAMBIO DE DESCOMPOSICIÓN.

Para hallar una descomposición a partir de otra tenemos que utilizar matrices diagonales. A través de ellas pasaremos de una descomposición ya calculada a otra.

* PASO DOOLITTE → CROUT:

DOOLITTLE → $A = L.U \quad \left| \begin{array}{l} \ell_{ii} = 1 \\ u_{ii} \neq 0 \end{array} \right.$

↓

Descompongo la U → $U = D.U' \;/\; u'_{ii} = 1$

Los elementos de la diagonal pasan a D y en U' queda toda la diagonal a 1.

↓

$A = L.U = L.D.U' = \underline{L'.U'} \quad \left| \begin{array}{l} u'_{ii} = 1 \\ \ell'_{ii} \neq 0 \end{array} \right.$ ← CROUT

* PASO DOOLITTLE → CHOLESKY:

Lo primero, hay que comprobar que se cumplan las condiciones necesarias para Cholesky, porque si no las cumple no se puede hacer.

CONDICIONES CHOLESKY $\left\{ \begin{array}{l} A = A^T \\ \\ \det A_r > 0 \qquad r = 1, \dots, n \end{array} \right.$

DOOLITTLE → $A = L.U \quad \left| \begin{array}{l} \ell_{ii} = 1 \\ u_{ii} \neq 0 \end{array} \right.$

↓

Descompongo la U → $U = D.U' \; ; \; D = D^{1/2}.\, D^{1/2}$ ← Raíz cuadrada

↓

$A = L.U = \underbrace{L.D^{1/2}}_{L'}.\underbrace{D^{1/2}.U'}_{L'^T} \Rightarrow \underline{A = L'.L'^T} \;/\; \ell_{ii} > 0$ ← CHOLESKY

EJEMPLO:

Encuentre la factorización de Doolittle, Cholesky y Crout de la matriz de coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} 60 & 30 & 20 \\ 30 & 20 & 15 \\ 20 & 15 & 12 \end{pmatrix}$$

1. Hay que comprobar si A admite la descomposición de $\boxed{\text{Cholesky}}$:

a) A simétrica $\Rightarrow A = A^T \rightarrow$ Vemos que sí.

b) A definida positiva $\Rightarrow \det A_r > 0 \quad r = 1, \dots, n$

$$a_{11} = 60 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 60 & 30 \\ 30 & 20 \end{vmatrix} > 0$$

$$\begin{vmatrix} 60 & 30 & 20 \\ 30 & 20 & 15 \\ 20 & 15 & 12 \end{vmatrix} > 0$$

Se cumplen las condiciones. Admite Cholesky.

2. Hallar la descomposición de $\boxed{\text{Doolittle}} \rightarrow$ $A = L \cdot U \;\Big|\; l_{ii} = 1, \; u_{ii} \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 60 & 30 & 20 \\ 30 & 20 & 15 \\ 20 & 15 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ l_{21} & 1 & \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ & u_{22} & u_{23} \\ & & u_{33} \end{pmatrix}$$

1º (1ª FILA DE L) x (TODA U).

$$1 \cdot u_{11} = a_{11} = 60 \rightarrow u_{11} = 60$$
$$1 \cdot u_{12} = a_{12} = 30 \rightarrow u_{12} = 30$$
$$1 \cdot u_{13} = a_{13} = 20 \rightarrow u_{13} = 20$$

↳ Fila 1 x Columna 3

2º (L - 1ª FILA) x (1ª COLUMNA DE U).

$$l_{21} \cdot u_{11} = a_{21} = 30; \quad 60 l_{21} = 30 \rightarrow l_{21} = \frac{1}{2}$$

$$l_{31} \cdot u_{11} = a_{31} = 20; \quad 60 l_{31} = 20 \rightarrow l_{31} = \frac{1}{3}$$

3º (2ª FILA DE L) x (U - 1ª COLUMNA).

$$l_{21} \cdot u_{12} + u_{22} = a_{22} = 20; \quad \frac{1}{2} \cdot 30 + u_{22} = 20 \rightarrow u_{22} = 5$$

$$l_{21} \cdot u_{13} + u_{23} = a_{23} = 15; \quad \frac{1}{2} \cdot 20 + u_{23} = 15 \rightarrow u_{23} = 5$$

4º (L - 1ª y 2ª FILA) x (2ª COLUMNA DE U).

$$l_{31} \cdot u_{12} + l_{32} \cdot u_{22} = a_{32}; \quad \frac{1}{3} 30 + l_{32} \cdot 5 = 15 \rightarrow l_{32} = 1$$

5º (3ª FILA DE L) x (U - 1ª y 2ª COLUMNA)

$$l_{31} \cdot u_{13} + l_{32} \cdot u_{23} + u_{33} = a_{33} = 12; \quad \frac{1}{3} \cdot 20 + 1 \cdot 5 + u_{33} = 12 \rightarrow u_{33} = \frac{1}{3}$$

La descomposición de Doolittle queda de la siguiente manera:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 60 & 30 & 20 \\ 30 & 20 & 15 \\ 20 & 15 & 12 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & \\ 1/2 & 1 & \\ 1/3 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 60 & 30 & 20 \\ & 5 & 5 \\ & & 1/3 \end{pmatrix}}_{U}$$

(No nos piden resolver el sistema).

(27/2/2008)

③ Para hallar la descomposición de $\boxed{\text{Crout}}$, en lugar de calcularla con el método normal, la obtengo a partir de la descomposición de Doolittle ya calculada.

PASO DE DOOLITTLE A CROUT:

Descomponer U en D.U'

$$(\text{DOOLITTLE})\ A = L.U \ \left|\ \begin{matrix} l_{ii}=1 \\ u_{ii}\neq 0\end{matrix}\right. \Longrightarrow A = \underbrace{LD}_{L'}\underbrace{U'}_{u'_{ii}=1} \Longrightarrow A = L'U' \ \left|\ \begin{matrix} u'_{ii}=1 \\ l_{ii}\neq 0\end{matrix}\right. \ (\text{CROUT})$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 60 & 30 & 20 \\ 30 & 20 & 15 \\ 20 & 15 & 12 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & \\ 1/2 & 1 & \\ 1/3 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 60 & & \\ & 5 & \\ & & 1/3 \end{pmatrix}}_{D}}_{L'} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}}_{U'\ (u'_{ii}=1)}$$

← Se divide toda la fila entre el elemento que he sacado en la diagonal.

La descomposición de Crout queda de la siguiente manera:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 60 & 30 & 20 \\ 30 & 20 & 15 \\ 20 & 15 & 12 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 60 & & \\ 30 & 5 & \\ 20 & 5 & 1/3 \end{pmatrix}}_{L'} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}}_{U'}$$

④ Para hallar la descomposición de $\boxed{\text{Cholesky}}$ también utilizo la descomposición de Doolittle ya calculada.

PASO DE DOOLITTE A CHOLESKY:

Raíz cuadrada

$$(\text{DOOLITTE})\ A = L.U \ \left|\ \begin{matrix} l_{ii}=1 \\ u_{ii}\neq 0\end{matrix}\right. \Longrightarrow A = LDU' = \underbrace{L.D^{1/2}}_{L'}.\underbrace{D^{1/2}.U'}_{L'^T} \Longrightarrow A = L'.L'^T \ (\text{CHOLESKY})$$

Se puede pasar a Cholesky siempre y cuando A cumpla las condiciones para admitir dicha descomposición.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 60 & 30 & 20 \\ 30 & 20 & 15 \\ 20 & 15 & 12 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & \\ 1/2 & 1 & \\ 1/3 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{60} & & \\ & \sqrt{5} & \\ & & \sqrt{1/3} \end{pmatrix}}_{D^{1/2}}}_{L'} \cdot \underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{60} & & \\ & \sqrt{5} & \\ & & \sqrt{1/3} \end{pmatrix}}_{D^{1/2}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}}_{U'}}_{L'^T}$$

$$\Big\Downarrow \text{ Multiplicamos}$$

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{60} & & \\ \frac{\sqrt{60}}{2} & \sqrt{5} & \\ \frac{\sqrt{60}}{3} & \sqrt{5} & \sqrt{1/3} \end{pmatrix}}_{L'} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{60} & \frac{\sqrt{60}}{2} & \frac{\sqrt{60}}{3} \\ & \sqrt{5} & \sqrt{5} \\ & & \sqrt{1/3} \end{pmatrix}}_{L'^T}$$

→ Así ha quedado la descomposición de Cholesky.

Recordemos que: $k(A) = \|A\| . \|A^{-1}\|$

Condicionamiento de una matriz.

* Si $k(A) = 1$ → Sistema bien condicionado => No tendré ningún problema.

* Si $k(A) >>>> 1$ → Sistema mal condicionado => Un error puede variar mucho el resultado.

Si el sistema está mal condicionado puedo hacer 2 cosas:

1) Ver qué error estoy cometiendo y comprobar si es un error admisible. Para ello utilizaremos:

- COTAS DE ERROR ABSOLUTO.
- COTAS DE ERROR RELATIVO.

2) Subsanar ese error: REFINAMIENTO ITERATIVO → Método para mejorar la solución.

8. COTAS DE ERROR RELATIVO PARA MÉTODOS DIRECTOS.

COTA INFERIOR ← ----- $\leq \dfrac{\|x_e - x\|}{\|x\|} \leq$ ----- → COTA SUPERIOR

↓ EXPRESIÓN DEL ERROR RELATIVO

Parto de las expresiones:

→ $Ax = b \Rightarrow x = A^{-1} . b$

→ $Ax_e = b + \Delta b \Rightarrow x_e = A^{-1}(b + \Delta b)$

Def. ERROR: $|x_e - x| = e$

$A|x_e - x| = r$

↓

$A . e = r$ → VECTOR RESIDUO

x = Verdadera solución de $Ax = b$.

x_e = Aproximación a la solución.

* COTA SUPERIOR.

Tengo que $\begin{cases} Ax = b & ① \\ A|x_e - x| = r \longrightarrow |x_e - x| = A^{-1} r & ② \end{cases}$

① $Ax = b \xrightarrow[\text{DE LA NORMA}]{\text{PROPIEDADES}} \|A\| . \|x\| \geq \|b\| \longrightarrow \|x\| \geq \frac{\|b\|}{\|A\|}$

② $\|x_e - x\| \leq \|A^{-1}\| . \|r\|$

Divide ambos lados entre $\|x\|$ para conseguir la expresión del error relativo.

$$\frac{\|x_e - x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| . \|r\|}{\frac{\|b\|}{\|A\|}}$$

En lugar de dividir entre $\|x\|$, divide entre algo menor. Así, el segundo miembro seguirá siendo una cota superior.

$$\frac{\|x_e - x\|}{\|x\|} \leq \frac{\overbrace{\|A\| . \|A^{-1}\|}^{k(A)} . \|r\|}{\|b\|} \longrightarrow \boxed{\frac{\|x_e - x\|}{\|x\|} \leq \frac{k(A) . \|r\|}{\|b\|}}$$

COTA SUPERIOR DEL ERROR RELATIVO.

* COTA INFERIOR.

Tengo que $\begin{cases} Ax = b \rightarrow x = A^{-1} b \rightarrow \|x\| \leq \|A^{-1}\| . \|b\| \\ A|x_e - x| = r \rightarrow \|A\| . \|x_e - x\| \geq \|r\| \; ; \; \|x_e - x\| \geq \frac{\|r\|}{\|A\|} \end{cases}$

Divido entre $\|x\|$

Divido entre algo mayor que $\|x\|$. Así, el segundo miembro sigue siendo una cota inferior.

$$\frac{\|x_e - x\|}{\|x\|} \geq \frac{\|r\|}{\underbrace{\|A\|.\|A^{-1}\|}_{k(A)}.\|b\|} \longrightarrow \boxed{\frac{\|x_e - x\|}{\|x\|} \geq \frac{\|r\|}{k(A).\|b\|}}$$

COTA INFERIOR DEL ERROR RELATIVO.

Las cotas de error que hemos calculado son para el caso de que las imprecisiones se encuentren en el vector b. Sin embargo, dependiendo de dónde se encuentren las imprecisiones existen distintas expresiones para las cotas de error:

Vector residuo cuando hay imprecisiones en b.

$$\boxed{\frac{\|r\|}{k(A).\|b\|} \leq \frac{\|x_e - x\|}{\|x\|} \leq \frac{k(A).\|r\|}{\|b\|}}$$

Cota ERROR RELATIVO si las imprecisiones se encuentran en EL VECTOR b.

Vector resíduo cuando hay imprecisiones en A.

$$\boxed{\frac{\|R\|}{k(A).\|A\|} \leq \frac{\|x_e - x\|}{\|x\|} \leq \frac{k(A).\|R\|}{\|A\|}}$$

Cota ERROR RELATIVO si las imprecisiones se encuentran en LA MATRIZ A.

$$\boxed{\frac{\|x_e - x\|}{\|x\|} \leq \frac{k(A).\|I\|}{1 - k(A).\frac{\|R\|}{\|A\|}} \cdot \left(\frac{\|R\|}{\|A\|} + \frac{\|r\|}{\|b\|} \right)}$$

Cota ERROR RELATIVO si las imprecisiones se encuentran en A y b.

¿Cómo saber si los errores están en A y/o b? Los errores suelen estar donde hay cifras decimales.

* ERRORES DE REDONDEO.

$$A.|x_e - x| = r$$

$$|x_e - x| = A^{-1}.r \xrightarrow{\text{TOMO NORMAS}} \boxed{\|x_e - x\| \leq \|A^{-1}\|.\|r\|}$$

COTA DE ERROR

* PROBLEMA 3:

¡IMPORTANTE!!! TÍPICO DE EXAMEN.

Sea $A = \begin{pmatrix} b & a & 0 \\ 1 & b & 1 \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix}$ con $a, b \in \mathbb{R}$

a) Determinar el rango de valores de a y b para que A admita descomposición de Cholesky y calcular dicha descomposición.

b) Aplicar lo anterior a calcular el determinante de A si $b = 3$ y $a = 1$.

(a) Impongo a la matriz A que cumpla las condiciones necesarias para el método de Cholesky:

1) SIMÉTRICA $\Rightarrow A = A^T$

Para que sea simétrica $\rightarrow$ $\boxed{a = 1}$

2) DEFINIDA POSITIVA $\Rightarrow$ CRITERIO DE STEVENS: $\det A_r > 0$, $r = 1, \dots, n$

$a_{11} = b \rightarrow \boxed{b > 0}$

porque $a=1$ por la 1ª condición.

$$\begin{vmatrix} b & 1 \\ 1 & b \end{vmatrix} = b^2 - 1 > 0 \; ; \; b^2 > 1 \; ; \; \boxed{|b| > 1}$$

$$\begin{vmatrix} b & 1 & 0 \\ 1 & b & 1 \\ 0 & 1 & b \end{vmatrix} = b^3 - 2b = b(b^2 - 2) > 0$$

$|b| > 0$

$b^2 - 2 > 0$; $b^2 > 2$; $\boxed{|b| > \sqrt{2}}$

Conclusión $\rightarrow$ Los parámetros a y b deben cumplir:

$$\boxed{a = 1 \; , \; b > \sqrt{2}}$$

Ahora hay que hallar la descomposición de Cholesky:

$$\boxed{A = L.L^T \;/\; l_{ii} > 0} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} b & 1 & 0 \\ 1 & b & 1 \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix}}_{A = A^T} = \underbrace{\begin{pmatrix} l_{11} & & \\ l_{21} & l_{22} & \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ & l_{22} & l_{32} \\ & & l_{33} \end{pmatrix}}_{L^T}$$

1º (1ª FILA DE L) x (TODA L^T).

$$l_{11}^2 = a_{11} = b \longrightarrow l_{11} = \sqrt{b}$$

$$l_{11} \cdot l_{21} = a_{12} = 1 \;;\; \sqrt{b} \cdot l_{21} = 1 \longrightarrow l_{21} = \frac{1}{\sqrt{b}}$$

$$l_{11} \cdot l_{31} = a_{13} \;;\; \sqrt{b} \cdot l_{31} = 0 \longrightarrow l_{31} = 0$$

2º (2ª FILA DE L) x (L^T - 1ª COLUMNA)

$$l_{21}^2 + l_{22}^2 = a_{22} \;;\; \frac{1}{b} + l_{22}^2 = b \longrightarrow l_{22} = \sqrt{\frac{b^2-1}{b}}$$

$$l_{21} \cdot l_{31} + l_{22} \cdot l_{32} = a_{23} = a_{32} \;;\; \frac{1}{\sqrt{b}} \cdot 0 + \sqrt{\frac{b^2-1}{b}} \cdot l_{32} = 1 \longrightarrow l_{32} = \sqrt{\frac{b}{b^2-1}}$$

3º (3ª FILA DE L) x (L^T - 1ª y 2ª COLUMNA).

$$l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 = a_{33} \;;\; 0 + \frac{b}{b^2-1} + l_{33}^2 = b \longrightarrow l_{33} = \sqrt{\frac{b^3-2b}{b^2-1}}$$

Por tanto, la descomposición de Chomsky queda de la forma:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} b & 1 & 0 \\ 1 & b & 1 \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{b} & & \\ 1/\sqrt{b} & \sqrt{\frac{b^2-1}{b}} & \\ 0 & \sqrt{\frac{b}{b^2-1}} & \sqrt{\frac{b^3-2b}{b^2-1}} \end{pmatrix}}_{L \,/\, l_{ii} > 0} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{b} & 1/\sqrt{b} & 0 \\ & \sqrt{\frac{b^2-1}{b}} & \sqrt{\frac{b}{b^2-1}} \\ & & \sqrt{\frac{b^3-2b}{b^2-1}} \end{pmatrix}}_{L^T}$$

(b) Una vez que tenemos la descomposición de Chomsky podemos calcular el determinante fácilmente:

$$|A| = \prod_{i=1}^{n} l_{ii}^2$$ → CHOMSKY ES MUY BUENO PARA HALLAR DETERMINANTES.

Sustituimos en la descomposición los parámetros por sus valores $(a=1,\ b=3)$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{3} & & \\ 1/\sqrt{3} & \sqrt{\frac{8}{3}} & \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{8}} & \sqrt{\frac{21}{8}} \end{pmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ & \sqrt{8/3} & \sqrt{3/8} \\ & & \sqrt{21/8} \end{pmatrix}}_{L^T}$$

$$|A| = \prod_{i=1}^{3} l_{ii}^2 = l_{11}^2 \cdot l_{22}^2 \cdot l_{33}^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{\frac{8}{3}}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{\frac{21}{8}}\right)^2 =$$

$$= \cancel{3} \cdot \frac{\cancel{8}}{\cancel{3}} \cdot \frac{21}{\cancel{8}} = \underline{21}$$

(4/3/2008)

9. MÉTODO DE REFINAMIENTO ITERATIVO.

Supongamos que nos dan un sistema $Ax = b$ para que lo resolvamos. Si el sistema tiene números decimales o está mal condicionado, es previsible que cometamos errores:

$$Ax = b \xrightarrow{\text{RESOLVER}} x_0 \neq x = A^{-1} b$$

Solución obtenida

Al resolver el sistema obtenemos x_0, que no es la verdadera solución porque el sistema no está bien condicionado. Podemos hallar las cotas de error o refinar la solución:

El método de refinamiento iterativo es una manera de arreglar la solución cuando veo que hay problemas. NO ES UN MÉTODO ITERATIVO DE RESOLUCIÓN DE SISTEMAS.

El algoritmo para refinar la solución es el siguiente:

1) Resolver $Ax = b$ obteniendo así la primera aproximación x_0:

$$\boxed{Ax = b \implies x_0}$$

2) Obtener el residuo:

$$|x_0 - x| = e_0 \rightarrow Ae_0 = r_0 \ ; \ A|x_0 - x| = r_0 \ ; \ Ax_0 - \underbrace{Ax}_{b} = r_0 \ ;$$

$$\boxed{r_0 = Ax_0 - b}$$

3) Obtener el error:

$$\boxed{Ae_0 = r_0 \implies e_0}$$ (Hallo e_0 al resolver el sistema).

→

4) Obtener una solución más refinada:

$$\boxed{x_1 = x_0 + e_0}$$

5) Comprobar la condición de parada:

$$\boxed{\begin{array}{l} \|r_i\| < \|r_{i-1}\| \Rightarrow \text{Volver al PASO 2.} \\ \|r_i\| \geq \|r_{i-1}\| \Rightarrow \text{Fin.} \end{array}}$$

10. MÉTODOS ITERATIVOS DE RESOLUCIÓN DE SISTEMAS LINEALES.

Estos métodos son análogos a los métodos iterativos de resolución de ecuaciones no lineales.

Vamos a estudiar:

* Expresión general del método iterativo.
* Método de Jacobi.
* Método de Gauss - Seidel.
* Método de ω- relajación.
* Condiciones de convergencia.
* Cotas de error => Criterio de parada.

10.1 EXPRESIÓN GENERAL DEL MÉTODO.

Tenemos un sistema $Ax = b$ tal que $x = A^{-1} \cdot b$

La idea es generar una sucesión de vectores solución $\{x_0, \dots, x_n\}$ esperando que su límite tienda a la solución x del sistema $Ax = b$.

Para generar la sucesión, comienzo en un x^0 arbitrario y a partir de ahí aplicaré reiteradamente una función a la solución x^i anterior:

x^0 arbitrario

$$x^1 = G(x^0)$$
$$x^2 = G(x^1)$$
$$x^3 = G(x^2)$$
$$\vdots$$
$$x^n = G(x^{n-1}) \longrightarrow \boxed{\lim_{x \to \infty} x^n = x \;/\; x = A^{-1} \cdot b}$$

Cuando al seguir iterando ya no obtengamos ningún beneficio, habremos alcanzado la x^n, que la tomaremos como nuestra solución.

Lo primero que tenemos que hacer es, dado un sistema $Ax = b$, pasar a la expresión general del método $Bx + C = x$:

$$Ax = b \Longrightarrow Bx + C = x \text{ tal que: } \begin{array}{l} Bx^0 + C = x^1 \\ Bx^1 + C = x^2 \\ \vdots \\ Bx^{n-1} + C = x^n \;/\; x^n \simeq x \end{array}$$

$G(x) = Bx + C$

$Bx + C = x$

La solución exacta x es un punto fijo. Sólo lo cumple ella.

Hay muchas formas de hacer esta transición. Nosotros lo haremos como se explica a continuación.

Tenemos nuestro sistema $Ax = b$. Le sumamos x a cada lado de la expresión:

$$Ax = b \longrightarrow Ax + x = b + x \ ;$$

$$(A + I)\,x = b + x \ ;$$

$$(A + I)\,x - b = x$$

$$B = (A + I)$$
$$C = -b$$

$$Bx + C = x$$

$\longrightarrow$ **EXPRESIÓN GENERAL DEL MÉTODO.**

Ambos sistemas (el original $Ax = b$ y el del método iterativo $Bx + C = x$) deben ser equivalentes (consistentes), es decir, deben tener las mismas soluciones. Para ello debe existir una relación entre A y b del original y B y C del iterativo.

Vamos a hallar la relación necesaria:

$$\left.\begin{array}{l} Ax = b \Rightarrow x = A^{-1}.\,b \\ \\ Bx + C = x \end{array}\right\}$$

$$C = x - Bx \ ; \ C = (I - B)\,x \longrightarrow \boxed{C = (I - B).\,A^{-1}.\,b}$$

$$\boxed{C = \mathcal{C}(b) \rightarrow \mathcal{C} = (I - B).\,A^{-1}}$$

CONDICIÓN DE CONSISTENCIA ($\mathcal{C}$)

$$\left.\begin{array}{l} C \ / \ Bx + C = x \\ b \ / \ Ax = b \end{array}\right\} C = \mathcal{C}(b) \Rightarrow$$ Si se cumple la condición de consistencia entre ambos sistemas, entonces tenemos 2 sistemas equivalentes.

Una vez establecida la equivalencia entre los dos sistemas, nos planteamos si ese método $G(x)$ nos llevará o no a la solución. Vamos a estudiar las condiciones de convergencia:

Sabemos por el teorema del punto fijo que obtendremos la solución de manera iterativa si la aplicación es contractiva. Por tanto, se trata de comprobar que la aplicación $G(x) = Bx + c$ es contractiva:

$$d(G(x), G(y)) = \|G(x) - G(y)\| = \|Bx + c - By - c\| =$$

$$= \underbrace{\|Bx - By\| \leq \|B\| . \|x - y\|}_{\text{Desigualdad triangular}} = \|B\| . d(x, y)$$

$\left.\begin{array}{l} x = Bx + c \\ y = By + c \end{array}\right\}$ Si conseguimos una norma matricial para la que $\|B\| < 1$, entonces converge.

Si existe $\|B\|$ tal que $\|B\| < 1 \Rightarrow \exists$ CONVERGENCIA DEL MÉTODO

El problema es que hay muchísimas normas y quizá no podamos probar todas, así que puede existir una norma <1 pero no demos con ella y nos creamos que el método no es convergente. El concepto de radio espectral de una matriz nos va a facilitar esto:

ESPECTRO DE UNA MATRIZ $\Rightarrow \sigma(A) = \{\lambda_i\}$ = Conjunto de los autovalores.

RADIO ESPECTAL DE UNA MATRIZ $\Rightarrow \rho(A) = \max\{|\lambda_i|\}$

→ PROPIEDAD.- $\rho(A) < \|A\|$

Por tanto, concluimos que:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } \exists \|B\| < 1 \quad \text{ó} \quad \rho(B) = \max |\lambda_i(B)| < 1 \\ \text{entonces existe convergencia: } \lim\limits_{n \to \infty} x^n = x \ / \ x = A^{-1}b \end{array}}$$

CONDICIONES DE CONVERGENCIA

Y si el método es convergente, ya puedo generar la sucesión porque sé que llegaré a la solución:

$$\begin{aligned} & x_0 \text{ arbitrario} \\ & x_1 = G(x^0) = Bx^0 + c \\ & x^2 = G(x^1) = Bx^1 + c \\ & \vdots \\ & x^n = G(x^{n-1}) = Bx^{n-1} + c \end{aligned}$$

* EJEMPLO:

Sea el método iterativo $x^{n+1} = Bx^n + c$ con $B = \begin{pmatrix} \alpha & 4 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ con $\alpha > 0$

a) Establecer el rango del parámetro α para el cual el método converge.

b) Hallar $\|B\|_1$ y $\|B\|_\infty$

c) ¿Se contradicen los resultados anteriores? Comentar la situación encontrada.

ⓐ Para estudiar la convergencia tenemos que hallar los autovalores:

Resolvemos $\rightarrow$ $B - \lambda I = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha-\lambda & 4 \\ 0 & \alpha-\lambda \end{pmatrix} = (\alpha-\lambda)^2 = 0$; $\lambda = \alpha$ autovalor

Para que converja debe cumplir $\rightarrow$ $\underline{\rho(B) = \alpha < 1}$

ⓑ $\| B \|_1 = \max_j \left(\sum_{i=1}^{n} |b_{ij}| \right) = \max \{\text{suma en columna}\} = 4 + \alpha > 1$

$\| B \|_\infty = \max_i \left(\sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| \right) = \max \{\text{suma en fila}\} = \alpha + 4 > 1$

ⓒ No se contradicen los resultados anteriores porque, aunque las normas calculadas sean mayores que 1, puede existir una norma que no he hallado y que sea menor que 1. Precisamente para no tener que calcular todas las normas, calculo el radio espectral.

* EJEMPLO:

Sea $Ax = b$ un sistema de ecuaciones lineales tal que:

$$\| I - A \| < 1$$

a) Comprobar si es o no contractiva la aplicación,

$$G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$G(x) = (I - A)x + b = x$$

b) Comprobar si el sistema tiene o no solución única.

(a) $G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$G(x) = (I - A)x + b \approx G(x) = Bx + c$

$$d(G(x), G(y)) = \| G(x) - G(y) \| = \| (I-A)x + \cancel{b} - (I-A)y - \cancel{b} \| =$$

$$= \| (I-A)(x-y) \| \leqslant \| I - A \| . \| x - y \|$$

Como $\| I - A \| < 1$, es contractiva $G(x)$.

Nos lo dice el enunciado.

(b) Para comprobar si tiene solución única hay que estudiar su consistencia: Si a partir de la expresión del método puedo obtener la expresión del sistema, entonces es que está bien y tiene solución única.

$\boxed{G(x) = x}$; $(I-A)x + b = x$; $x - Ax$

$x - Ax + b = x$; $-Ax + b = 0$; $\boxed{Ax = b}$

He podido llegar a la expresión del sistema, así que si $\exists$ sol. única.

(5/3/2008)

* MÉTODO GENERAL:

Consiste en pasar de un sistema con una matriz difícil de resolver a la suma de 3 matrices fáciles:

$$\boxed{A = M - N} \quad \text{tal que} \begin{cases} M \text{ es invertible} \Rightarrow \exists M^{-1} \\ N \text{ tiene que ser} \begin{cases} \text{Diagonal (D)} \\ \text{Triang. superior (U)} \\ \text{Triang. inferior (L)} \end{cases} \end{cases}$$

Por tanto, tenemos que:

$$Ax = b \rightarrow (M-N)x = b \ ; \ Mx - Nx = b \ ;$$

$$Mx = Nx + b \ ; \quad x = M^{-1}(Nx) + M^{-1}.b$$

M invertible

$$B = M^{-1}.N$$
$$C = M^{-1}.b$$

$$x^{n+1} = Bx^n + C \rightarrow \boxed{x^{n+1} = M^{-1}Nx^n + M^{-1}b}$$

MÉTODO GENERAL

A partir del método general, según cómo elija M y N, tendré varios métodos.

Vamos a estudiar los siguientes métodos:

* JACOBI
* GAUSS - SEIDEL
* W - RELAJACIÓN

− RÁPIDO +

10.2. MÉTODO DE JACOBI.

Consiste en escribir A como suma de su parte estrictamente triangular inferior L, estrictamente triangular superior U y la diagonal D:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \Longrightarrow \boxed{A = D + L + U}$$

Pero, si no nos dicen nada, utilizaremos esta otra descomposición (si quieren que usemos otra nos la tendrán que dar):

$$\boxed{A = D - L - U}$$

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & & \\ & & a_{33} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Cambiar el signo en L y U.

$$L = \begin{pmatrix} -a_{21} & & & \\ -a_{31} & -a_{32} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{n,n-1} \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & -a_{n-1,n} \end{pmatrix}$$

Jacobi escoge su $A = M - N$ mediante $A = D - L - U$ de la siguiente forma:

$$\boxed{\text{JACOBI} \begin{cases} M = D \\ N = L + U \end{cases}}$$

Sustituimos en la expresión del método general:

$$Mx^{n+1} = Nx^n + b \quad ; \quad Dx^{n+1} = (L+U)x^n + b \; ;$$

$$\boxed{x^{n+1} = D^{-1}(L+U)x^n + D^{-1}b} \rightarrow$$ EXPRESIÓN MATRICIAL DEL MÉTODO DE JACOBI.

Si sustituimos en otra de las expresiones generales:

$$x^{n+1} = Bx^n + C \begin{cases} B_j = D^{-1}(L+U) \longrightarrow B_j = D^{-1}(D-A) \\ \boxed{C_j = D^{-1} \cdot b} \end{cases}$$

L + U = D - A

$$\boxed{B_j = I - D^{-1}A} \rightarrow$$ OTRA EXPRESIÓN DE LA MATRIZ DE JACOBI.

Esto son las expresiones matriciales del método de Jacobi, pero ¿cómo se genera la sucesión de vectores x^i?

* CÁLCULO DE LOS VECTORES SUCESIVOS:

Tenemos las expresiones:

$$B_j = D^{-1}(L+U) \qquad Dx^{n+1} = (L+U)x^n + b$$

Tenemos que hallar la sucesión:

$$x^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix} \longrightarrow x^1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ \vdots \\ x_n^1 \end{pmatrix} \longrightarrow \cdots \longrightarrow x^n = \begin{pmatrix} x_1^n \\ x_2^n \\ \vdots \\ x_n^n \end{pmatrix}$$

(arbitrario)

Planteamos las matrices :

$$Dx^{n+1} = (L+U)\,x^{n} + b$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & & \\ & & a_{33} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}}_{D} \cdot \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_3^1 \\ \vdots \\ x_n^1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ -a_{31} & -a_{32} & 0 & \cdots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & -a_{n3} & \cdots & -a_{n,n-1} \end{pmatrix}}_{L+U} \cdot \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned}
a_{11}\cdot x_1^1 &= b_1 - a_{12}x_2^0 - a_{13}x_3^0 - \ldots - a_{1n}x_n^0 \\
a_{22}\cdot x_2^1 &= b_2 - a_{21}x_1^0 - a_{23}x_3^0 - \ldots - a_{2n}x_n^0 \\
&\vdots \\
a_{ii}\cdot x_i^1 &= b_i - a_{i1}x_1^0 - a_{i2}x_2^0 - \ldots - a_{i,i-1}x_{i-1}^0 - a_{i,i+1}x_{i+1}^0 - \ldots - a_{in}x_n^0 \\
&\vdots \\
a_{nn}\cdot x_n^1 &= b_n - a_{n1}x_1^0 - a_{n2}x_2^0 - \ldots - a_{n,n-1}\cdot x_{n-1}^0
\end{aligned}\right\}$$

$$x_i^1 = \frac{b_i - a_{i1}x_1^0 - a_{i2}x_2^0 - \ldots - a_{i,i-1}x_{i-1}^0 - \ldots - a_{in}x_n^0}{a_{ii}}$$

$$\boxed{x_i^{n+1} = \frac{b_i - \sum_{i\neq j}^{n} a_{ij}\cdot x_j^{n}}{a_{ii}} \qquad i = 1, 2, \ldots, n}$$

EXPRESIÓN GENERAL DEL MÉTODO DE JACOBI.

* EJEMPLO:

Resolver el siguiente sistema por el Método de Jacobi, empezando en $x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y parando cuando $\| x_i^{k+1} - x_i^k \|_\infty < 0'03$.

$$\left.\begin{array}{rl} 7x_1 - x_2 + 4x_3 &= 8 \\ 3x_1 - 8x_2 + 2x_3 &= 4 \\ -4x_1 + x_2 - 6x_3 &= 3 \end{array}\right\}$$

Obtenemos la matriz de coeficientes y el vector de términos independientes:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 4 \\ 3 & -8 & 2 \\ -4 & 1 & -6 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Descomposición de JACOBI → $A = D - L - U$ (Descomposición general de la matri A)

$$D = \begin{pmatrix} 7 & & \\ & -8 & \\ & & -6 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 0 & & \\ -3 & 0 & \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ & 0 & -2 \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

¡CAMBIAR LOS SIGNOS!

$$Dx^1 = (L+U)x^0 + b$$ (Método de Jacobi)

$$\begin{pmatrix} 7 & & \\ & -8 & \\ & & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_3^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ -3 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{lll} 7x_1^1 = 8 + 1.0 + (-4).0 & ; & x_1^1 = 8/7 \\ -8x_2^1 = 4 + (-3).0 + (-2).0 & ; & x_2^1 = -1/2 \\ -6x_3^1 = 3 + 4.0 + (-1).0 & ; & x_3^1 = -1/2 \end{array}\right\} \quad x^1 = \begin{pmatrix} 8/7 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

Comprobamos si podemos dar por finalizado el proceso: debemos calcular $\| x^1 - x^0 \|_\infty$

$$x^1 - x^0 = \begin{pmatrix} 8/7 - 0 \\ -1/2 - 0 \\ -1/2 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/7 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = x^1$$

NORMA VECTORIAL:

$$\| x \|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \{ |x_i| \}$$

Máximo componente del vector (en valor absoluto).

$\| x^1 - x^0 \|_\infty = \dfrac{8}{7} > 0'03 \Rightarrow$ Hay que seguir iterando.

$$Dx^2 = (L + U)\, x^1 + b$$

$$\begin{pmatrix} 7 & & \\ & -8 & \\ & & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ -3 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} 8/7 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}}^{x^1} + \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\| x^2 - x^1 \|_\infty$

⋮

Seguimos iterando. Hacen falta 9 iteraciones mediante el método de Jacobi (con otros métodos necesitamos menos iteraciones).

$$x^9 = \begin{pmatrix} 2'354 \\ 0'912 \\ -1'923 \end{pmatrix}$$

Para calcular los vectores x^i no hace falta poner la expresión matricial $Dx^{n+1} = (L + U)x^n + b$.

Se calculan aplicando el método directamente:

$$x_i^{n+1} = \frac{b_i - \sum_{i \neq j}^{n} a_{ij} x_j^n}{a_{ii}}$$

10.3. MÉTODO DE GAUSS-SEIDEL.

El método de Gauss-Seidel puede verse como una variante de Jacobi. En aquél intentábamos cumplir todas las ecuaciones despejando en cada una de ellas una componente y formando así el siguiente punto de la iteración. Gauss-Seidel hace lo mismo, pero no espera a tener las n componentes para usarlas en la siguiente iteración: en cuanto ajusta x_1^i, usa dicho valor para ajustar $x_2^i, x_3^i, \ldots$

Gauss-Seidel utiliza la siguiente descomposición:

$$\boxed{A = D - L - U}$$

La expresión de la descomposición general de A es $A = M - N$.

Gauss-Seidel escoge su $A = M - N$ mediante $A = D - L - U$ de la siguiente forma:

$$\boxed{\text{GAUSS-SEIDEL} \begin{cases} M = D - L \\ N = U \end{cases}}$$

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & & \\ & & a_{33} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} & & & & \\ -a_{21} & & & & \\ -a_{31} & -a_{32} & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{n,n-1} & \end{pmatrix}$$

Cambiar el signo en L y U.

$$U = \begin{pmatrix} & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ & & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ & & & & \vdots \\ & & & & -a_{n-1,n} \\ & & & & \end{pmatrix}$$

Sustituimos en la expresión del método general:

$$Mx^{n+1} = Nx^n + b \; ; \qquad (D-L)\,x^{n+1} = Ux^n + b \; ;$$

$$\boxed{x^{n+1} = (D-L)^{-1} \cdot Ux^n + (D-L)^{-1} \cdot b}$$

EXPRESIÓN MATRICIAL DEL MÉTODO DE GAUSS-SEIDEL

Si sustituimos en otra de las expresiones generales:

$$x^{n+1} = Bx^n + C \begin{cases} B_{G\text{-}S} = (D-L)^{-1} \cdot U \\ C_{G\text{-}S} = (D-L)^{-1} \cdot b \end{cases}$$

OTRA EXPRESIÓN DE LAS MATRICES DE GAUSS-SEIDEL.

Esto son las expresiones matriciales del método de Gauss-Seidel, pero ¿cómo se genera la sucesión de vectores x^i?

* CÁLCULO DE LOS VECTORES SUCESIVOS:

$$(D-L)\,x^{n+1} = Ux^n + b$$

Lo ponemos de forma matricial:

$$\boxed{1} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ +a_{21} & a_{22} & & & \\ +a_{31} & +a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ +a_{n1} & +a_{n2} & +a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{D-L} \cdot \begin{pmatrix} x_1^{n+1} \\ x_2^{n+1} \\ x_3^{n+1} \\ \vdots \\ x_n^{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ & & \cdots & -a_{3n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & -a_{n-1,n} \end{pmatrix}}_{U} \begin{pmatrix} x_1^n \\ x_2^n \\ x_3^n \\ \vdots \\ x_n^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Con signo + porque es $-L$.

G-S ES MÁS RÁPIDO QUE JACOBI.

(6/3/2008)

Si sacamos las ecuaciones a partir de la expresión matricial anterior, tenemos que:

$$a_{11}\cdot \boxed{x_1^{n+1}} = \cancel{0 \cdot x_1^n} - a_{12}\cdot x_2^n - a_{13}\cdot x_3^n - \dots - a_{1n}\cdot x_n^n + b_1 \;;$$

incógnita

$$a_{21}\cdot x_1^{n+1} + a_{22}\boxed{x_2^{n+1}} = \cancel{0 \cdot x_1^n} + \cancel{0 \cdot x_2^n} - a_{23}\cdot x_3^n - \dots - a_{2n}\cdot x_n^n + b_2 \;;$$

$$a_{31}\cdot x_1^{n+1} + a_{32}x_2^{n+1} + a_{33}\boxed{x_3^{n+1}} = \cancel{0 \cdot x_1^n} + \cancel{0 \cdot x_2^n} + \cancel{0 \cdot x_3^n} - a_{34}x_4^n - \dots - a_{3n}\cdot x_n^n + b_3 \;;$$

$$\vdots$$

$$x_1^{n+1} = \frac{-a_{12}\cdot x_2^n - a_{13}\cdot x_3^n - \dots - a_{1n}\cdot x_n^n + b_1}{a_{11}} \;;$$

$$x_2^{n+1} = \frac{-a_{23}x_3^n - \dots - a_{2n}x_n^n + b_2 - a_{21}\cdot x_1^{n+1}}{a_{22}} \;;$$

APROVECHA LOS x^{n+1} YA CALCULADOS.

$$x_3^{n+1} = \frac{-a_{34}x_4^n - \dots - a_{3n}x_n^n + b_3 - a_{31}x_1^{n+1} - a_{32}x_2^{n+1}}{a_{33}} \;;$$

$$\vdots$$

$$x_n^{n+1} = \frac{b_n - a_{n1}x_1^{n+1} - a_{n2}x_2^{n+1} - a_{n3}x_3^{n+1} - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{n+1}}{a_{nn}} \;;$$

Generalizamos y obtenemos el algoritmo de Gauss-Seidel:

$$\boxed{x_i^{n+1} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^n}{a_{ii}}}$$

EXPRESIÓN GENERAL DEL MÉTODO DE GAUSS-SEIDEL.

Vemos que para $i=1$, coincide con el método de Jacobi:

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{i\neq j}^{n} a_{ij}x_j^n}{a_{ii}}$$

El primer paso (calcular x_1^{n+1}) es igual que Jacobi porque es en el segundo paso (calcular x_2^{n+1}) cuando ya podemos incorporar y utilizar las componentes del vector que estamos hallando (x^{n+1}) que hemos calculado en pasos previos.

Otra forma matricial alternativa (y equivalente) a la forma $\boxed{1}$ se obtiene operando un poco más:

$$(D-L)\,x^{n+1} = Ux^{n} + b\,;$$

$$Dx^{n+1} - Lx^{n+1} = Ux^{n} + b\,; \qquad \boxed{Dx^{n+1} = Lx^{n+1} + Ux^{n} + b}$$

$$\boxed{2}\quad \begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & & \\ & & a_{33} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^{n+1} \\ x_2^{n+1} \\ x_3^{n+1} \\ \vdots \\ x_n^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & & \\ -a_{21} & & & & \\ -a_{31} & -a_{32} & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^{n+1} \\ x_2^{n+1} \\ x_3^{n+1} \\ \vdots \\ x_n^{n+1} \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ & & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ & & & & -a_{3n} \\ & & & & \vdots \\ & & & & -a_{n-1,n} \\ & & & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^{n} \\ x_2^{n} \\ x_3^{n} \\ \vdots \\ x_n^{n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$\boxed{1}$ y $\boxed{2}$ son equivalentes y nos llevan a la misma expresión general del método de Gauss-Seidel.

* EJEMPLO: (el mismo de ayer, pero ahora con G-S)

Resolver el siguiente sistema por el Método de Gauss-Seidel, empezando en $x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y parando cuando $\| x_i^{k+1} - x_i^k \|_\infty < 0'03$.

$$\left.\begin{aligned} 7x_1 - x_2 + 4x_3 &= 8 \\ 3x_1 - 8x_2 + 2x_3 &= -4 \\ -4x_1 + x_2 - 6x_3 &= 3 \end{aligned}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 4 \\ 3 & -8 & 2 \\ -4 & 1 & -6 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Descomposión de la matriz $\Rightarrow$ $A = D - L - U$

$$D = \begin{pmatrix} 7 & & \\ & -8 & \\ & & -6 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 0 & & \\ -3 & 0 & \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ & 0 & -2 \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Método de GAUSS-SEIDEL $\rightarrow$ $D x^{n+1} = L x^{n+1} + U x^n + b$

$$\begin{pmatrix} 7 & & \\ & -8 & \\ & & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_3^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ -3 & 0 & \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_3^1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ & 0 & -2 \\ & & 0 \end{pmatrix} \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}^{x^0} + \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1^1 &= \frac{8}{7} \\ x_2^1 &= \frac{(-3)\cdot 8/7 - 4}{-8} = 0'929 \\ x_3^1 &= \frac{4 \cdot \frac{8}{7} - 1\cdot(0'929) + 3}{-6} = -1'107 \end{aligned}\right\} \quad x^1 = \begin{pmatrix} 8/7 \\ 0'929 \\ -1'107 \end{pmatrix}$$

¿Paramos ya? Lo compruebo:

$$\| x^1 - x^0 \|_\infty = \max |x_i| = \frac{8}{7} > 0'03 \Rightarrow \text{Hay que seguir iterando.}$$

máximo componente del vector (en valor absoluto).

(Hacen falta 6 iteraciones: converge más rápido que Jacobi)

10.4. MÉTODO DE W-RELAJACIÓN.

El método de w-relajación consiste esencialmente en calcular el valor propuesto por la fórmula de Gauss-Seidel para la componente x_i^{n+1}, pero en lugar de usarlo directamente como paso siguiente un punto intermedio entre x_i^{n+1} y x_i^n.

Dependiendo del parámetro w escogido tomaremos para x_i^{n+1} un valor que puede estar más cerca del inicial ($w \simeq 0$), a mitad de camino ($w \simeq 0'5$) o más alejado del inicial ($w > 1$).

$w = 1 \Rightarrow$ GAUSS-SEIDEL
$w < 1 \Rightarrow$ SUBRELAJACIÓN
$w > 1 \Rightarrow$ SOBRERELAJACIÓN

Si el parámetro w está bien escogido, aceleramos mucho.

¿Cómo metemos el parámetro?

Usamos la descomposición de siempre $\rightarrow$ $A = D - L - U$

$$A = D - L - U \, ;$$

$$A = \frac{D}{w} - \frac{D}{w} + D - L - U \, ;$$

La descomposición general de A es $A = M - N$. Tomo las matrices de la siguiente forma:

$$\boxed{w\text{-RELAJACIÓN} \begin{cases} M = \dfrac{D}{w} - L \\ N = \dfrac{D}{w} - D + U \end{cases}}$$

Sustituimos en la expresión del método general:

$$Mx^{n+1} = Nx^{n} + b \, ;$$

$$\downarrow$$

$$\left(\frac{D}{w} - L\right) x^{n+1} = \left(\frac{D}{w} - D + U\right) x^{n} + b \, ;$$

$$\left(\frac{D - wL}{w}\right) x^{n+1} = \left(\frac{D - Dw + Uw}{w}\right) x^{n} + b \, ;$$

$$\left(\frac{D - wL}{w}\right) x^{n+1} = \left(\left(\frac{1-w}{w}\right) D + U\right) x^{n} + b \, ;$$

(Multiplico por w)

$$(D - wL)\, x^{n+1} = (1 - w)\, Dx^{n} + wUx^{n} + wb \, ;$$

$$Dx^{n+1} - wLx^{n+1} = (1 - w)\, Dx^{n} + wUx^{n} + wb \, ;$$

$\rightarrow$

$Dx^{n+1} = wLx^{n+1} + wUx^{n} + (1-w)\,Dx^{n} + wb\,;$

$(1-w)\,Dx^{n}$

$$\boxed{Dx^{n+1} = w\left(b + Lx^{n+1} + Ux^{n} - Dx^{n}\right) + Dx^{n}}$$ → **EXPRESIÓN MATRICIAL DE W- RELAJACIÓN.**

Ésta es la expresión general del método de w-relajación, pero ¿cómo se calcula la sucesión de vectores x^{i}?

* CÁLCULO DE LOS VECTORES SUCESIVOS: (ECUACIONES DEL MÉTODO)

$Dx^{n+1} = w\left(b + Lx^{n+1} + Ux^{n} - Dx^{n}\right) + Dx^{n}$

Lo pongo de forma matricial:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & & \\ & & a_{33} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}}_{D} \cdot \begin{pmatrix} x_1^{n+1} \\ x_2^{n+1} \\ x_3^{n+1} \\ \vdots \\ x_n^{n+1} \end{pmatrix} = W \cdot \Bigg[\underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{b} + \underbrace{\begin{pmatrix} & & & \\ -a_{21} & & & \\ -a_{31} & -a_{32} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & & -a_{n,n-1} \end{pmatrix}}_{L} \cdot \begin{pmatrix} x_1^{n+1} \\ x_2^{n+1} \\ x_3^{n+1} \\ \vdots \\ x_n^{n+1} \end{pmatrix} +$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ & & \ddots & -a_{3n} \\ & & & \vdots \\ & & & -a_{n-1,n} \end{pmatrix}}_{U} \begin{pmatrix} x_1^{n} \\ x_2^{n} \\ x_3^{n} \\ \vdots \\ x_n^{n} \end{pmatrix} - \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & & \\ & & a_{33} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}}_{D} \cdot \begin{pmatrix} x_1^{n} \\ x_2^{n} \\ x_3^{n} \\ \vdots \\ x_n^{n} \end{pmatrix} \Bigg] +$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & & \\ & & a_{33} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}}_{D} \cdot \begin{pmatrix} x_1^{n} \\ x_2^{n} \\ x_3^{n} \\ \vdots \\ x_n^{n} \end{pmatrix}$$

$(1-w)\,Dx^{n}$

Si sacamos las ecuaciones a partir de la expresión matricial anterior, tenemos que:

$$a_{11} \cdot \underline{x_1^{n+1}} = w\left[b_1 + 0 - a_{12} \cdot x_2^n - a_{13} \cdot x_3^n - \dots - a_{1n} x_n^n - a_{11} \cdot x_1^n \right] + a_{11} \cdot x_1^n$$

$$a_{22} \cdot \underline{x_2^{n+1}} = w\left[b_2 - a_{21} \cdot x_1^{n+1} - a_{23} \cdot x_3^n - \dots - a_{2n} \cdot x_n^n - a_{22} \cdot x_2^n \right] + a_{22} \cdot x_2^n$$

$$\vdots$$

$$x_i^{n+1} = \frac{w}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^n \right] + \frac{(1-w)\, \cancel{a_{ii}}\, x_i^n}{\cancel{a_{ii}}} \; ;$$

$$\boxed{x_i^{n+1} = \frac{w\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^n \right]}{a_{ii}} + (1-w)\, x_i^n}$$

EXPRESIÓN GENERAL DEL MÉTODO DE w-RELAJACIÓN.

Lógicamente, tiene similitudes con la expresión de G-S.

* EJEMPLO: (el mismo ejemplo, pero ahora con w-relajación).

Resolver el siguiente sistema por el Método de w-relajación, con $w = 2$.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 4 \\ 3 & -8 & 2 \\ -4 & 1 & -6 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \| x^{k+1} - x^k \|_\infty < 0'03$$

Descomposición de la matriz $\Rightarrow$ $A = D - L - U$

$$D = \begin{pmatrix} 7 & & \\ & -8 & \\ & & -6 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 0 & & \\ -3 & 0 & \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ & 0 & -2 \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Método de <u>ω- RELAJACIÓN</u> → $Dx^{n+1} = \omega\left(b + Lx^{n+1} + Ux^{n}\right) + (1-\omega)Dx^{n}$

$$\begin{pmatrix} 7 & & \\ & -8 & \\ & & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_3^1 \end{pmatrix} = 2\left[\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & & \\ -3 & 0 & \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_3^1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ & 0 & -2 \\ & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \end{pmatrix}\right] +$$

$$+ (1-2) \cdot \begin{pmatrix} 7 & & \\ & -8 & \\ & & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1^1 = \dfrac{2(8+0+1.0-4.0)-7.0}{7} \;;\; x_1^1 = \dfrac{16}{7} \simeq 2'28 \\[2ex] x_2^1 = \dfrac{2(-4-3.\,^{16}/_{7} - 2.0)+8.0}{-8} \;;\; x_2^1 = 2'71 \\[2ex] x_3^1 = \dfrac{2(3+4.\,^{16}/_{7} - 1.\,2'71)+6.0}{-6} \;;\; x_3^1 = -3'14 \end{array}\right\} \quad x^1 = \begin{pmatrix} 16/7 \\ 2'71 \\ -3'14 \end{pmatrix}$$

¿Paramos ya? Lo compruebo:

$$\| \overbrace{x^1}^{x^1} - \underset{\substack{\| \\ 0}}{x^0} \|_\infty = \max |x_i| = 3'14 > 0'03 \Rightarrow \text{Hay que seguir iterando.}$$

máximo componente del vector (en valor absoluto).

(Converge en la 2ª iteración).

* EJERCICIO: ¡Examen antiguo!

Dado el siguiente sistema:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 6 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 11'33 \\ 32 \\ 42 \end{pmatrix}$$

a) Obtener una solución aproximada: x_0

b) Obtener una mejor aproximación por refinamiento:

$$Ax_0 - b = r_0 \; ; \quad Ae_0 = r_0 \implies e_0 \Rightarrow x_1 = x_0 + e_0$$

c) Calcular las cotas de error relativo:

$$\frac{\|r\|}{k(A)\,\|b\|} \leqslant \frac{\|x_e - x\|}{\|x\|} \leqslant \frac{k(A)\,\|r\|}{\|b\|}$$

(Vemos que las imprecisiones se pueden encontrar en b).

ⓐ Vamos a obtener una solución aproximada.

Miramos la matriz A para decidir qué método usamos.

Vemos que:

$$\left.\begin{array}{l} A = A^T \Rightarrow \text{Simétrica} \\ \left.\begin{array}{l} |a_{11}| > 0 \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0 \\ |A| > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Definida positiva} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\text{CHOLESKY}}$$

Se cumplen las condiciones, así que podemos usar la DESCOMPOSICIÓN DE CHOLESKY:

$$\boxed{A = L \cdot L^T} \qquad l_{ii} > 0$$

Calculamos los elementos de L y L^T / $l_{ii} > 0$

$$\begin{pmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & & \\ l_{21} & l_{22} & \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ & l_{22} & l_{32} \\ & & l_{33} \end{pmatrix}$$

1º (1ª FILA DE L) x (TODA L^T)

$$l_{11}^2 = 6 \rightarrow l_{11} = 2'40$$

$$l_{11} \cdot l_{21} = a_{12} = a_{21} \rightarrow l_{21} = -0'40$$

$$l_{11} \cdot l_{31} = a_{13} = a_{31} \rightarrow l_{31} = -0'40$$

2º (2ª FILA DE L) x (L^T - 1ª COLUMNA)

3º (3ª FILA DE L) x (L^T - 1ª y 2ª COLUMNA)

Obtenemos la siguiente descomposición:

$$\begin{pmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 6 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2'40 & & \\ -0'40 & 2'40 & \\ -0'40 & -0'40 & 2'40 \end{pmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2'40 & -0'40 & -0'40 \\ & 2'40 & -0'40 \\ & & 2'40 \end{pmatrix}}_{L^T}$$

Resolvemos el sistema:

$$Ax = b \Rightarrow L \cdot \underbrace{L^T x}_{y} = b \Rightarrow \begin{cases} Ly = b \rightarrow \text{Hallo } y \\ L^T x = y \rightarrow \text{Hallo } x \end{cases}$$

1º) $Ly = b$

$$\begin{pmatrix} 2'40 & & \\ -0'40 & 2'40 & \\ -0'40 & -0'40 & 2'40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11'33 \\ 32 \\ 42 \end{pmatrix}$$

$2'40\, y_1 = 11'33 \Rightarrow$ Hallo y_1

$-0'40\, y_1 + 2'40\, y_2 = 32 \Rightarrow$ Hallo y_2

$-0'40\, y_1 - 0'40\, y_2 + 2'40\, y_3 = 42 \Rightarrow$ Hallo y_3

2º) $L^T x = y$

$$\begin{pmatrix} 2'40 & -0'40 & -0'40 \\ & 2'40 & -0'40 \\ & & 2'40 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2'40\, x_3 = y_3 \Rightarrow \text{Hallo } x_3 \\ 2'40\, x_2 - 0'40\, x_3 = y_2 \Rightarrow \text{Hallo } x_2 \\ 2'40\, x_1 - 0'40\, x_2 - 0'40\, x_3 = y_1 \Rightarrow \text{Hallo } x_1 \end{array}\right\} \boxed{x_0 = \begin{pmatrix} 4'67 \\ 7'62 \\ 9'05 \end{pmatrix}}$$

(b) Ya hemos obtenido una primera aproximación x_0. Ahora vamos a mejorarla utilizando el método de refinamiento iterativo.

* Obtener el resíduo: $r_0 = Ax_0 - b$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2'40 & & \\ -0'40 & 2'40 & \\ -0'40 & -0'40 & 2'40 \end{pmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2'40 & -0'40 & -0'40 \\ & 2'40 & -0'40 \\ & & 2'40 \end{pmatrix}}_{L^T} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 4'67 \\ 7'62 \\ 9'05 \end{pmatrix}}_{x_0} - \underbrace{\begin{pmatrix} 11'33 \\ 32 \\ 42 \end{pmatrix}}_{b} = \begin{pmatrix} r_{01} \\ r_{02} \\ r_{03} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_0 = \begin{pmatrix} -0'02 \\ 0 \\ -0'01 \end{pmatrix}$$ VECTOR RESÍDUO.

* Obtener el error : $Ae_0 = r_0$

$$\begin{pmatrix} -0'02 \\ 0 \\ -0'01 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2'40 & & \\ -0'40 & 2'40 & \\ -0'40 & -0'40 & 2'40 \end{pmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2'40 & -0'40 & -0'40 \\ & 2'40 & -0'40 \\ & & 2'40 \end{pmatrix}}_{L^T} \begin{pmatrix} e_{01} \\ e_{02} \\ e_{03} \end{pmatrix}$$

$L^T . e_0 = y$; $Ly = r_0 \Rightarrow y$

$L^T . e_0 = y \Rightarrow e_0$

$$e_0 = \begin{pmatrix} -0'0039 \\ 0'0011 \\ -0'0025 \end{pmatrix}$$

* Obtener una solución más refinada: $x_1 = x_0 + e_0$

$$x_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4'67 \\ 7'62 \\ 9'05 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0'0039 \\ 0'0011 \\ -0'0025 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{x_1 = \begin{pmatrix} 4'6661 \\ 7'6189 \\ 9'0475 \end{pmatrix}}$$

c) Como es el vector b el que tiene decimales, supondremos que las imprecisiones están en b.

La expresión para las cotas de error relativo es:

$$\frac{\|r\|}{k(A)\|b\|} \leqslant \frac{\|x_e - x\|}{\|x\|} \leqslant \frac{k(A)\cdot\|r\|}{\|b\|}$$

donde $k(A) = \|A\| . \|A^{-1}\|$

x = Verdadera solución del sistema $Ax = b$

x_e = Aproximación a la solución.

Es necesario calcular A^{-1}. Lo hacemos por Gauss - Jordan.

GAUSS - JORDAN es muy bueno para hallar INVERSAS:

$$(A|I) \xrightarrow{G-J} (I|A^{-1})$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{G-J} \cdots \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0'1786 & 0'0357 & 0'0357 \\ 0 & 1 & 0 & 0'0357 & 0'1786 & 0'0357 \\ 0 & 0 & 1 & 0'0357 & 0'0357 & 0'1786 \end{array}\right)$$

Entonces, tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 6 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0'1786 & 0'0357 & 0'0357 \\ 0'0357 & 0'1786 & 0'0357 \\ 0'0357 & 0'0357 & 0'1786 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 11'33 \\ 32 \\ 42 \end{pmatrix} \qquad r = \begin{pmatrix} -0'02 \\ 0 \\ -0'01 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_\infty = \max_i \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right) = \max \{ \text{suma en fila} \} = 6 + |-1| + |-1| = 8$$

$$\|A^{-1}\|_\infty = \max_i \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right) = 0'25$$

$$\|b\|_\infty = \max |x_i| = \text{máximo componente del vector} = 42$$

$$\|r\|_\infty = \max |x_i| = 0'02$$

Sustituimos:

$$\boxed{\frac{0'02}{8 \cdot 0'25 \cdot 42} \leq \frac{x_e - x}{\|x\|} \leq \frac{8 \cdot 0'25 \cdot 0'02}{42}}$$

→ Cota de error que tengo si aproximo la solución x mediante x_1 (hallada antes)

RESUMEN: MÉTODOS ITERATIVOS DE RESOLUCIÓN DE SISTEMAS LINEALES.

MÉTODO	M - N	MATRIZ DEL MÉTODO: B	ITERACIÓN
JACOBI	$A = \underbrace{D}_{M} - \underbrace{(L+U)}_{N}$	$B_j = D^{-1}(L+U) =$ $= I - D^{-1}A$	$Dx^{n+1} = (L+U)x^n + b$
GAUSS - SEIDEL	$A = \underbrace{(D-L)}_{M} - \underbrace{U}_{N}$	$B_{G\text{-}S} = (D-L)^{-1} \cdot U$	$(D-L)x^{n+1} = Ux^n + b$
w - RELAJACIÓN	$A = \underbrace{\left(\frac{D}{w} - L\right)}_{M} - \underbrace{\left(\frac{1-w}{w} \cdot D + U\right)}_{N}$ $w \neq 0$	$B_w = \left(\frac{D}{w} - L\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1-w}{w} \cdot D + U\right)$	$\left(\frac{D}{w} - L\right)x^{n+1} = \left(\frac{1-w}{w} \cdot D + U\right)x^n + b$

(11/3/2008)

10.5. CONVERGENCIA DE JACOBI.

Por lo estudiado anteriormente sabemos que si encontramos una norma de la matriz del método (B) menor que 1, o si el radio espectral es menor que 1, entonces el método converge.

$$\boxed{\begin{array}{l} \|B_j\| < 1 \longrightarrow \text{CONVERGE} \\ \rho(B_j) = \max|\lambda_i| < 1 \longrightarrow \text{CONVERGE} \end{array}}$$

Hacerlo así es usar la TEORÍA GENERAL. Pero ahora vamos a ver casos particulares.

(A) CASOS PARTICULARES.

1) A ESTRICTAMENTE DOMINANTE EN LA DIAGONAL: (En cada fila el valor absoluto del elem. de la diagonal es mayor que la suma de los valores absolutos de los otros elem. de la fila).

$$B_j = (I - D^{-1} \cdot A) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-a_{21}}{a_{11}} & \cdots & \frac{-a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{-a_{21}}{a_{22}} & 0 & \cdots & \frac{-a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{-a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{-a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\|B_j\| = \max_i \left(\sum_{j \neq i} \frac{|a_{ij}|}{a_{ii}} \right) < 1 \Longrightarrow \text{JACOBI CONVERGE.}$$

Por ser estrictamente dominante en la diagonal: $\sum_{j \neq i} |a_{ij}| < |a_{ii}|$

2) A ES SIMÉTRICA ($A = A^T$) Y A^* DEFINIDA POSITIVA:

$$A^* = D + L + U = \begin{pmatrix} a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Entonces, JACOBI CONVERGE.

3) A ES TRIDIAGONAL:

Entonces el método de JACOBI y GAUSS-SEIDEL CONVERGEN a la vez porque se cumple:

$$\left(\rho(B_J)\right)^2 = \rho(B_{G-S})$$

Al elevar al cuadrado algo menor que 1, el resultado es menor que sí mismo.

(B) SIMPLIFICACIÓN DE LA CONVERGENCIA DE JACOBI

Hallamos los autovalores de B_J:

$$|B_J - \lambda I| = 0 \implies \{\lambda_i\} \qquad B_J = D^{-1}(L+U)$$

Esta demostración cae MUCHO en problemas.

$$|D^{-1}(L+U) - \lambda I| = 0 \; ;$$

$$|D^{-1}(L+U) - \lambda D^{-1}D| = 0 \; ; \quad |D^{-1}| . |L + U - \lambda D| = 0 \; ;$$

Condición para que exista inversa: $\exists D \iff |D^{-1}| \neq 0$

Por las propiedades del det. puedo cambiarlo de signo.

$$|L + U - \lambda D| = 0 \implies |\lambda D - L - U| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \implies \{\lambda_i\} \implies \rho(B_J) = \max |\lambda_i|$$

$$\rho(B_J) < 1 \implies \text{CONVERGE}$$

ES DECIR, PARA JACOBI NO TENGO QUE HALLAR NORMAS. MIRO LA MATRIZ A, Y SI NO SE DA NINGUNO DE LOS CASOS PARTICULARES, ENTONCES UTILIZO ESTA SIMPLIFICACIÓN.

* EJEMPLO:

Estudiar si se puede resolver el sistema $Ax = b$ por Jacobi.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Primero miro A:

- A no es diagonal dominante.
- A no es simétrica.
- A no es tridiagonal.

Aplico la simplificación:

$$|\lambda D - L - U| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & 2 & -2 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 2 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = 0 \; ; \quad \lambda^3 + \cancel{4} - \cancel{4} + \cancel{4\lambda} - \cancel{2\lambda} - \cancel{2\lambda} = 0 \; ;$$

$\lambda^3 = 0$; $\lambda = 0$ TRIPLE

$\rho(B_J) = |\lambda| = 0 < 1 \Rightarrow$ JACOBI SÍ CONVERGE

Se queda con los mismos signos que la A original porque es $-L$ y $-U$ (L y U tenían los signos cambiados).

10.6. CONVERGENCIA DE GAUSS-SEIDEL.

(A) CASOS PARTICULARES.

1) A ESTRICTAMENTE DOMINANTE EN LA DIAGONAL: $\sum_{j\neq i} |a_{ij}| < |a_{ii}|$

(Igual que Jacobi)

G-S CONVERGE también.

2) A ES SIMÉTRICA y A = D - L - U DEFINIDA POSITIVA:

$A = D - L - U$

Entonces, G-S CONVERGE.

3) A ES TRIDIAGONAL: JACOBI y G-S CONVERGEN a la vez:

$$\rho(B_j)^2 = \rho(B_{G-S})$$

(B) SIMPLIFICACIÓN DE LA CONVERGENCIA DE G-S.

Hallamos los autovalores de B_{G-S}:

$|B_{GS} - \lambda I| = 0 \Rightarrow \{\lambda_i\}$ $\quad B_{GS} = (D-L)^{-1} \cdot U$

IMPORTANTE.

$|(D-L)^{-1} \cdot U - \lambda I| = 0$;

$|(D-L)^{-1} \cdot U - \lambda (D-L)^{-1}(D-L)| = 0$; $|(D-L)^{-1}| \cdot |U - \lambda D + \lambda L| = 0$;

$\exists (D-L) \Leftrightarrow |(D-L)^{-1}| \neq 0 \Rightarrow |U - \lambda D + \lambda L| = 0 \Rightarrow$

Por las propiedades del det. puedo cambiar el signo.

$$\Rightarrow |\lambda D - \lambda L - U| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \dots & \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \{\lambda_i\}$$

$\underbrace{\max |\lambda_i|}_{\rho(B_{G-S})} < 1 \Rightarrow$ CONVERGE.

* EJEMPLO :

Estudiar si se puede resolver el sistema $Ax = b$ por Gauss - Seidel. (Estudiar la convergencia).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Primero miro A:

- A no es diagonal dominante.
- A no es simétrica.
- A no es tridiagonal.

Aplico la simplificación para el cálculo de $\{\lambda_i\}$

$$\begin{vmatrix} \lambda & 2 & -2 \\ \lambda & \lambda & 1 \\ 2\lambda & 2\lambda & \lambda \end{vmatrix} = 0 \; ; \quad \lambda^3 + 4\lambda - \cancel{4\lambda^2} + \cancel{4\lambda^2} - 2\lambda^2 - 2\lambda^2 = 0 \; ;$$

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda = 0 \; ;$$

$$\lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = 0 \quad \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_{2,3} = \dfrac{4 \pm 0}{2} = 2 \text{ DOBLE} \end{cases}$$

$\rho(B_{G-S}) = \max|\lambda_i| = 2 > 1 \Rightarrow$ G-S NO CONVERGE PARA ESTE A.

10.7. CONVERGENCIA DE ω-RELAJACIÓN.

(A) CONDICIÓN GENERAL.

Los métodos de ω-relajación sólo convergen si $\omega \in (0,2)$.

$\Downarrow$

$0 < \omega < 2$

Condición necesaria, pero no suficiente.

(B) CASOS PARTICULARES.

1) A ESTRICTAMENTE DOMINANTE EN LA DIAGONAL: $\sum_{j \neq i} |a_{ij}| < |a_{ii}|$

El método de ω-RELAJACIÓN CONVERGE si $0 < \omega \leq 1$.

2) A ES SIMÉTRICA Y DEFINIDA POSITIVA:

El método de ω-RELAJACIÓN CONVERGE $\forall \omega \,/\, \omega \in (0,2)$.

3) A ES TRIDIAGONAL, SIMÉTRICA ($A = A^T$) Y DEFINIDA POSITIVA:

Entonces CONVERGEN JACOBI, G-S y ω-RELAJACIÓN.

Además existe un valor para ω que da la CONVERGENCIA ÓPTIMA:

$$\omega = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(B_J)^2}} \quad \begin{cases} \rho(B_J) = 0 \Rightarrow \omega = 1 \\ \rho(B_J) \neq 0 \Rightarrow 1 < \omega < 2 \end{cases}$$

Radio espectral de la matriz de Jacobi del problema en cuestión.

RESUMEN: CONVERGENCIA DE LOS MÉTODOS.

MATRIZ A	JACOBI	GAUSS-SEIDEL	ω-RELAJACIÓN
ESTRICTAMENTE DOMINANTE EN LA DIAGONAL	CONVERGE	CONVERGE	CONVERGE SI $0 < \omega \leq 1$
SIMÉTRICA	CONVERGE SI $A^* = D + L + U$ ES DEFINIDA POSITIVA	CONVERGE SI $A = D - L - U$ ES DEFINIDA POSITIVA	CONVERGE SI: A DEFINIDA POSITIVA $0 < \omega < 2$
TRIDIAGONAL	CONVERGE A LA VEZ QUE G-S: $\rho(B_j)^2 = \rho(B_{G-S})$	CONVERGE A LA VEZ QUE JACOBI: $\rho(B_j)^2 = \rho(B_{G-S})$	—
TRIDIAGONAL, SIMÉTRICA Y DEFINIDA POSITIVA	CONVERGEN A LA VEZ LOS 3 MÉTODOS. EXISTE CONVERGENCIA ÓPTIMA PARA EL PARÁMETRO: $\omega = \dfrac{2}{1+\sqrt{1-\rho(B_j)^2}}$ → $\omega = 1 \;/\; \rho(B_j) = 0$; $1 < \omega < 2 \;/\; \rho(B_j) \neq 0$		

(12/3/2008)

* PROBLEMA:

Sea la matriz A: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ con $a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$

a) Demostrar que los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel para A convergen o divergen a la vez.

b) Encontrar una condición necesaria y suficiente sobre los elementos de la matriz A para que ambos métodos converjan.

c) En el caso de que ambos métodos converjan, ¿cuál lo hace más rápidamente? Justificar la respuesta.

a) Para que los dos métodos converjan se tiene que cumplir la siguiente condición:

$$\rho(B_j)^2 = \rho(B_{G-S})$$

Miro la matriz A, pero como no tiene ninguna propiedad en especial, tengo que calcular el radio espectral de ambas matrices:

Hallo los autovalores y el máximo será $\rho(B)$:

$$|B_j - \lambda I| = 0 \implies \{\lambda_i\}$$

Utilizo la SIMPLIFICACIÓN DE LA CONVERGENCIA DE JACOBI.

$$|\lambda D - L - U| = 0 \; ; \quad \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & \lambda a_{22} \end{vmatrix} = \lambda^2 a_{11} a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} = 0 \; ;$$

$$\lambda^2 a_{11} a_{22} = a_{12} a_{21} \; ;$$

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{a_{12} a_{21}}{a_{11} a_{22}}} \; ; \quad \rho(B_j) = + \sqrt{\frac{a_{12} a_{21}}{a_{11} a_{22}}}$$

(el máximo)

$$|B_{G-S} - \lambda I| = 0 \Rightarrow \{\lambda_i\}$$

Utilizo la SIMPLIFICACIÓN DE LA CONVERGENCIA DE G-S.

$$|\lambda D - \lambda L - U| = 0 ; \quad \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{vmatrix} = \lambda^2 a_{11} \cdot a_{22} - \lambda a_{21} \cdot a_{12} = 0 ;$$

$$\lambda(\lambda a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}) = 0 \quad \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = \dfrac{a_{21} \cdot a_{12}}{a_{11} \cdot a_{22}} \end{cases}$$

$$\rho(B_{G-S}) = \frac{a_{21} \cdot a_{12}}{a_{11} \cdot a_{22}} \rightarrow \text{(el máximo)}$$

Si $\begin{cases} \rho(B_j) = \sqrt{\dfrac{a_{12} a_{21}}{a_{11} a_{22}}} < 1 \\ \rho(B_{GS}) = \dfrac{a_{12} a_{21}}{a_{11} a_{22}} < 1 \end{cases}$ entonces ambos métodos convergen.

Además, se cumple la condición:

$$\rho(B_j)^2 = \rho(B_{GS}) \Rightarrow \left(\sqrt{\frac{a_{21} a_{12}}{a_{11} a_{22}}}\right)^2 = \frac{a_{21} a_{12}}{a_{11} a_{22}} \Rightarrow \text{CONVERGEN / DIVERGEN A LA VEZ.}$$

b) La condición necesaria y suficiente para que converjan es:

$$\rho(B) < 1$$

$$\frac{a_{12} a_{21}}{a_{11} a_{22}} < 1 ; \quad a_{12} \cdot a_{21} < a_{11} \cdot a_{22}$$

Por tanto, para que converjan ambos métodos, A debe cumplir:

$$\left.\begin{array}{l} a_{12} \cdot a_{21} < a_{11} \cdot a_{22} \\ \text{Para no dividir por cero!} \begin{cases} a_{11} \neq 0 \\ a_{22} \neq 0 \end{cases} \end{array}\right\}$$

c) Cuanto más cercano a 0 esté el $\rho(B)$, más rápido convergerá el método.
Cuanto más cercano a 1 esté el $\rho(B)$, más lento convergerá el método.

Converge más rápido Gauss-Seidel porque tiene un radio espectral menor. El radio espectral de Jacobi es mayor que el de G-S, pero menor que 1 (suponemos que converge), y al elevar al cuadrado algo menor que 1, el resultado es menor que sí mismo.

$$\rho(B_{GS}) < \rho(B_j)$$

* PROBLEMA: PARCIAL 2004

Sea la ecuación:

$$(1 - w - \lambda)^2 \cdot \left(\frac{2}{a_2} - \lambda\right) = 0 \qquad \boxed{1}$$

Sea la matriz $B = M^{-1} \cdot N$ con:

$$M = \begin{pmatrix} a_1/w & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3/w \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} \frac{(1-w)a_1}{w} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-w)a_3}{w} \end{pmatrix}$$

$$a_i \neq 0 \quad , i = 1, 2, 3$$

a) Demostrar que para que el método iterativo converja se debe cumplir que los $|\lambda_i|$ obtenidos en la ecuación $\boxed{1}$ sean menores que la unidad.

b) Hallar el rango de los valores de w que hace que el radio espectral sea lo menor posible para $a_2 = 4$.

a) En este caso nos dan la matriz del método iterativo (B). Para demostrar lo que piden primero hay que calcular B (porque nos la dan en función de M y N) y luego ver los autovalores de B que nos salen.

$$B = M^{-1}N$$

$$B = \underbrace{\begin{pmatrix} w/a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/a_2 & 0 \\ 0 & 0 & w/a_3 \end{pmatrix}}_{M^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{(1-w)a_1}{w} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-w)a_3}{w} \end{pmatrix}}_{N} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1-w & 0 & 0 \\ 0 & 2/a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-w \end{pmatrix}}_{B}$$

Hallo los autovalores:

$$|B - \lambda I| = 0 \longrightarrow \begin{vmatrix} 1-w-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2/a_2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-w-\lambda \end{vmatrix} = (1-w-\lambda)^2 \cdot \left(\frac{2}{a_2} - \lambda\right) = 0 \ ; \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{cases} (1-w-\lambda)^2 = 0 \ ; \ 1-w-\lambda = 0 \ ; \ \lambda_{1,2} = 1-w \quad \text{DOBLE} \\ \frac{2}{a_2} - \lambda = 0 \ ; \ \lambda_3 = \frac{2}{a_2} \end{cases}$$

Para que el método converja es necesario que $w \in (0,2)$.

$$\left.\begin{array}{l} w = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 \\ w = 2 \Rightarrow \lambda_1 = -1 \end{array}\right\} \lambda_1 \in (-1,1) \Rightarrow |\lambda_1| < 1$$

$$\Downarrow$$

El método converge.

(b) Para $a_2 = 4$ tenemos los autovalores:

$$\lambda_{1,2} = 1 - w \quad ; \quad \lambda_3 = \frac{2}{a_2} = \frac{1}{2}$$

Como el radio espectral es el máximo de los autovalores, como mínimo será $\frac{1}{2}$:

$$|1-w| \leq \frac{1}{2} \; ; \; -\frac{1}{2} \leq 1-w \leq \frac{1}{2} \; \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq 1-w \; ; \; w \leq \frac{3}{2} = 1'5 \\ 1-w \leq \frac{1}{2} \; ; \; w \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$w \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$$

(13/3/2008)

10.8. COTA DE ERROR RELATIVO PARA LOS MÉTODOS ITERATIVOS.

A continuación vamos a ver qué error se comete al calcular la aproximación $x^n \simeq x \,/\, x = A^{-1}b$.

x es la solución exacta.

Tenemos que LA RELACIÓN ENTRE ERRORES CONSECUTIVOS es:

$$e^n = x^n - x = Bx^{n-1} + \cancel{c} - Bx - \cancel{c} = B(x^{n-1} - x) = Be^{n-1}$$

$$\boxed{e^n = Be^{n-1}}$$

Vamos a hallar diferentes cotas.

a) SUPONIENDO QUE $\exists \|B\| < 1$ CONOCIDA (FÁCIL DE HALLAR).

a.1) Suponiendo $x^0 = 0$.

$$\underbrace{\|x^n - x\|}_{e^n = Be^{n-1}} \leqslant \|B\| . \|x^{n-1} - x\| \leqslant \|B\|^2 . \|x^{n-2} - x\| \leqslant \dots \leqslant \|B\|^n . \|\overset{\overset{0}{\shortparallel}}{x^0} - x\|$$

$$\|Ax\| \leqslant \|B\| . \|x\|$$

Por tanto, tenemos:

$$\boxed{\frac{\|x^n - x\|}{\|x\|} \leqslant \|B\|^n} \rightarrow$$

COTA DEL ERROR RELATIVO SI $\exists \|B\| < 1$ y $x^0 = 0$.

(Ésta casi no se usa)

a.2) Suponiendo $x^0 \neq 0$.

$$x^n = Bx^{n-1} + c$$

$$x = Bx + c$$

$$\|x^n - x\| = \| Bx^{n-1} + \cancel{c} - Bx - \cancel{c} \| = \| Bx^{n-1} - Bx \| \leqslant \|B\| . \|x^{n-1} - x\| ;$$

$$\|B\| . \|x^{n-1} - x\| = \|B\| . \|x^n - x^{n-1} - x^n - x\| \leqslant$$

$$\leqslant \|B\| . \left(\|x^n - x^{n-1}\| + \|x^n - x\| \right)$$

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

Como las normas son en valor absoluto, podemos cambiar el signo a lo de dentro.

$$\|x^n - x\| \leqslant \|B\| . \|x^n - x^{n-1}\| + \|B\| . \|x^n - x\| ;$$

$$\|x^n - x\| - \|B\| . \|x^n - x\| \leqslant \|B\| . \|x^n - x^{n-1}\| ;$$

$$\|x^n - x\| (1 - \|B\|) \leqslant \|B\| . \|x^n - x^{n-1}\| ;$$

$$\boxed{\|x^n - x\| \leqslant \frac{\|B\| . \|x^n - x^{n-1}\|}{1 - \|B\|}}$$

Si quiero poner esta fórmula general en función de x^0 y x^1, hago lo siguiente:

Aplicar sucesivamente:
$$x^n = Bx^{n-1} + c$$
$$x^{n-1} = Bx^{n-2} + c$$
$$\vdots$$

$$\|x^n - x\| \leqslant \frac{\|B\| \cdot \|x^n - x^{n-1}\|}{1 - \|B\|} \leqslant \frac{\|B\| \cdot (Bx^{n-1} + \cancel{c} - Bx^{n-2} - \cancel{c})}{1 - \|B\|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\|B\|^2 \cdot \|x^{n-1} - x^{n-2}\|}{1 - \|B\|} \leqslant \dots$$

Por tanto, tenemos:

(Ésta es la que se suele usar)

$$\|x^n - x\| \leqslant \frac{\|B\|^n \cdot \|x^1 - x^0\|}{1 - \|B\|} \longrightarrow \boxed{\frac{\|x^n - x\|}{\|x\|} \leqslant \frac{\|B\|^n \cdot \|x^1 - x^0\|}{1 - \|B\|}}$$

COTA DEL ERROR RELATIVO

SI $\exists \|B\| < 1$ y $x^0 \neq 0$

b) SUPONIENDO QUE $\nexists \|B\| < 1$ CONOCIDA.

En las primeras iteraciones el error es errático, pero posteriormente tiende a ser constante: la norma del error decae por una cte < 1:

$$\|x^n - x\| \leqslant c\,\|x^{n-1} - x\|$$

Esta constante c está estrechamente ligada al radio espectral $\rho(B)$.

Se puede estimar experimentalmente como: $\boxed{c \simeq \dfrac{\|x^n - x^{n-1}\|}{\|x^{n-1} - x^{n-2}\|}}$

$$\boxed{\frac{\|x^n - x\|}{\|x\|} \leqslant \frac{c \cdot \|x^1 - x^0\|}{1 - c}}$$

COTA DEL ERROR RELATIVO

SI $\nexists \|B\| < 1$

(No es tan exacta como cuando conocemos $\|B\|$)

* PROBLEMA:

Dado el sistema $Ax = b$ con $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Calcular el número mínimo de iteraciones necesarias para que ninguna componente de x^k difiera de la correspondiente componente de la solución exacta en más de $5 \cdot 10^{-3}$, aplicando el método de Jacobi y empezando en $x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Lo primero es hallar la matriz de Jacobi:

$$B_j = I - D^{-1} \cdot A$$

$$B_j = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I} - \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}}_{D^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} = B_j$$

Encontramos una norma de B_j menor que 1:

$$\|B_j\|_\infty = \max_i \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right) = \frac{1}{2}$$

También necesitamos hallar x^1: $x^1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_3^1 \end{pmatrix}$

$$x_i^{n+1} = \frac{b_i - \sum_{i \neq j}^{n} a_{ij} \cdot x_j^n}{a_{ii}}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1^1 &= \frac{b_1 - a_{12} \cdot x_2^0 - a_{13} \cdot x_3^0}{a_{11}} = \frac{-1 - (-1) \cdot 0 - 0 \cdot 0}{2} = -\frac{1}{2} \\ x_2^1 &= \frac{b_2 - a_{21} \cdot x_1^0 - a_{23} \cdot x_3^0}{a_{22}} = \frac{0 - 0 \cdot 0 - (-2) \cdot 0}{4} = 0 \\ x_3^1 &= \frac{b_3 - a_{31} \cdot x_1^0 - a_{32} \, x_2^0}{a_{33}} = \frac{-1 - 0 \cdot 0 - (-1) \cdot 0}{2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \quad x^1 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

Hallamos $\| x^1 - x^0 \|$:

$$x^1 - x^0 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \| x^1 - x^0 \| = \max_i \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right) = \frac{1}{2}$$

Ya tenemos todos los datos necesarios para utilizar la fórmula de la cota de error:

$$\frac{\| x^n - x \|}{\| x \|} \leq \frac{\| B_J \|^n \cdot \| x^1 - x^0 \|}{1 - \| B_J \|} \leq 5 \cdot 10^{-3}$$

$$\frac{\| B_J \|^n \cdot \| x^1 - x^0 \|}{1 - \| B_J \|} \leq 5 \cdot 10^{-3} \quad ; \quad \frac{(1/2)^n \cdot 1/2}{1 - 1/2} \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} \quad ;$$

$$\frac{(1/2)^n \cdot \cancel{1/2}}{\cancel{1/2}} \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} \quad ; \quad \left(\frac{1}{2} \right)^n \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-2}$$

Tomar logaritmos

$$\underbrace{n \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right)}_{<0} \leq \ln\left(\frac{1}{2} \cdot 10^{-2}\right) \quad ; \quad n \geq 7'64$$

$n = 8$ iteraciones mínimo.

* PROBLEMA : ¡EXAMEN!

Sea $Ax = b$ un sistema de ecuaciones lineales tal que:

$$\| I - A \| < 1$$

a) Comprobar si es contractiva la aplicación:

$$G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \; / \; G(x) = (I - A)x + b$$

b) Estudiar si tiene solución única el sistema dado: ¿$\exists x \, / \, x = A^{-1} b$?

c) Si además de la condición anterior, todos los elementos de la diagonal principal de A son iguales a 1, se pide:

c.1) Razonar sobre la convergencia del método de Jacobi aplicado a la resolución del sistema dado.

c.2) Deducir que el 0 es un autovalor de la matriz de iteración del método de Gauss-Seidel aplicado al sistema dado.

(a) ¿Contractividad?

$$\left.\begin{array}{l} G(x) = (I - A)x + b \\ G(y) = (I - A)y + b \end{array}\right\}$$

$$d(G(x), G(y)) = \| G(x) - G(y) \| = \| (I-A)x + \cancel{b} - (I-A)y - \cancel{b} \| =$$

$$= \| (I-A)x - (I-A)y \| = \| (I-A)(x-y) \| ;$$

$$d(G(x), G(y)) = \| (I-A)(x-y) \| \leqslant \| I - A \| . \| x - y \|$$

$\Downarrow$

$\| I - A \| < 1$ (Por el enunciado).

$\Downarrow$

$G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ES CONTRACTIVA.

(b) ¿Existe solución única? $\Rightarrow$ ¿$\exists\, x \,/\, x = A^{-1}b$?

$$\boxed{x^n = G(x^{n-1})} \Rightarrow x^n = (I - A)x^{n-1} + b$$

La solución x es el punto fijo, por lo que:

$$\boxed{x = G(x)} \Rightarrow x = (I - A)x + b\ ;$$

$$\cancel{x} = \cancel{x} - Ax + b\ ; \qquad Ax = b \Rightarrow x = A^{-1}b$$

Existe solución única, y ésta es: $x = A^{-1}b$.

(c) Suponemos que: $\| I - A \| < 1$, $a_{ii} = 1$

(c.1) Para razonar sobre la convergencia tengo que ver si consigo una $\| B_j \| < 1$ fácilmente. Si no, utilizo la simplificación de Jacobi para ver si $\rho(B_j) < 1$.

$$B_j = I - D^{-1}A$$

$$D = I \Rightarrow D^{-1} = I$$

$$B_j = I - I.A = I - A\ ;$$

$$B_j = I - A \Rightarrow \| B_j \| = \| I - A \| < 1$$

(Por el enunciado)

Como he encontrado una $\| B_j \| < 1 \Rightarrow$ JACOBI CONVERGE.

$\longrightarrow$

c.2 ¿ $\lambda_i = 0$?

$$B_{GS} = (\underset{\substack{\downarrow \\ a_{ii}=1}}{D} - L)^{-1} \cdot U = (I - L)^{-1} \cdot U$$

Para hallar los autovalores utilizo la SIMPLIFICACIÓN DE G-S.

$$|\lambda \underset{\substack{\shortparallel \\ I}}{D} - \lambda L - U| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda 1 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda 1 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \lambda a_{n3} & \dots & \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda \begin{vmatrix} 1 & a_{21} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \lambda a_{n2} & \lambda a_{n3} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{cases} \lambda = 0 \Rightarrow \text{ES UN AUTOVALOR.} \\ |\dots| = 0 \end{cases}$$

Como tenemos toda una columna multiplicada por una cte, podemos sacarla fuera de la matriz y el determinante no se ve afectado.

* PROBLEMA 9.

Sea $x^{n+1} = Bx^n + c$ con $x^0 \in \mathbb{R}^3$ la iteración resultante de aplicar el método de Jacobi a la resolución del sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix} x = b \quad / \quad a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}^3$$

a) Determinar el rango de valores de a para el que el método converja.

b) Considerando la cota:

$$\| x^n - x \| \leqslant \frac{\|B\|_\infty^n \; \| x^1 - x^0 \|_\infty}{1 - \|B\|_\infty}$$

y los vectores:

$$x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calcular el rango de valores de a positivos para los cuales se verifica:

$$\| x^n - x \|_\infty \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad \forall n \geqslant 1$$

a) Para comprobar la convergencia miraremos $\rho(B_J)$

Usamos la SIMPLIFICACIÓN DE JACOBI para hallar los autovalores:

$$|\lambda D - L - U| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda & a & a \\ a & \lambda & a \\ a & a & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & a \\ a & \lambda \end{vmatrix} - a \begin{vmatrix} a & a \\ a & \lambda \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} a & \lambda \\ a & a \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda(\lambda^2 - a^2) - a(a\lambda - a^2) + a(a^2 - a\lambda) =$$

$$= \lambda^3 - a^2\lambda - a^2\lambda + a^3 + a^3 - a^2\lambda =$$

$$= \lambda^3 - 3a^2\lambda + 2a^3 = 0$$

Por RUFFINI ---→

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -3a^2 & 2a^3 \\ a & & a & a^2 & -2a^3 \\ \hline & 1 & a & -2a^2 & 0 \end{array}$$

$$(\lambda - a)(\lambda^2 + a\lambda - 2a^2) = 0;$$

$$\lambda = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 8a^2}}{2} = \frac{-a \pm 3a}{2}$$

Tenemos: $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = a$, $\lambda_3 = -2a$

$\rho(B_J) = \max\{|\lambda_i|\} = |-2a| = 2a < 1$; $a < \frac{1}{2}$ => PARA QUE JACOBI CONVERJA.

(b) Para poder utilizar la cota primero tengo que hallar los elementos necesarios: $\|B\|_\infty$ y $\|x^1 - x^0\|_\infty$

$$B_j = D^{-1}(L+U) = I - D^{-1}.A$$

$$B_j = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I} - \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{D^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}}_{A} = \begin{pmatrix} 0 & -a & -a \\ -a & 0 & -a \\ -a & -a & 0 \end{pmatrix} = B_j$$

$$\|B_j\|_\infty = max_i \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right) = |-2a| = 2a$$

$$x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{JACOBI}} x^1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_3^1 \end{pmatrix}$$

$$x_i^{n+1} = \frac{b_i - \sum_{i \neq j}^{n} a_{ij} \cdot x_j^n}{a_{ii}}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1^1 &= \frac{b_1 - a_{12}\cancel{x_2^0}^{\,0} - a_{13}\cancel{x_3^0}^{\,0}}{a_{11}} = \frac{1}{1} = 1 \\ x_2^1 &= \frac{b_2 - a_{21}\cancel{x_1^0}^{\,0} - a_{23}\cancel{x_3^0}^{\,0}}{a_{22}} = \frac{1}{1} = 1 \\ x_3^1 &= \frac{b_3 - a_{31}\cancel{x_1^0}^{\,0} - a_{32}\cancel{x_2^0}^{\,0}}{a_{33}} = \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}\right\} x^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x^1 - x^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \|x^1 - x^0\|_\infty = 1$$

Ya tenemos lo necesario:

$$\|x^n - x\| \leqslant \frac{\|B\|_\infty^n \; \|x^1 - x^0\|_\infty}{1 - \|B\|_\infty} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad \forall n \geqslant 1$$

$$\downarrow$$

$$\frac{(2a)^n \cdot 1}{1-2a} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \; ; \; \frac{(2a)^n}{1-2a} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = 1 \rightarrow \dfrac{2a}{1-2a} \leqslant \dfrac{1}{4} \; ; \; 8a = 1-2a \; ; \; a = \dfrac{1}{10} \Rightarrow 0 \leqslant a \leqslant \dfrac{1}{10} \\ n > 1 \rightarrow \log(4a) \leqslant \log(1-2|a|) - \log(2) \end{cases}$$

(25/3/2008)

* PROBLEMA 10:

Sea el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Convertir a forma triangular mediante el método de eliminación de Gauss y resolver.

b) Indicar la factorización LU asociada a la eliminación anterior. Resolver a partir de la factorización.

ⓐ GAUSS $\Rightarrow$ Triangularizar superiormente.

La expresión general del método es: $E_i' = E_i - m_{ij} E_j \quad i > j$

Matriz ampliada $\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & 2 \end{array}\right)$

Hacer 0.

$a_{11} \neq 0$

$$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{-1}{1} = -1 \qquad E_2' = E_2 + 1.E_1$$

$$m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{2}{1} = 2 \qquad E_3' = E_3 - 2E_1$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 9 & 0 \end{array}\right)$$

Hacer 0.

$a_{22}' = -1 \neq 0$

$$m_{32} = \frac{a_{32}'}{a_{22}'} = \frac{-3}{-1} = 3 \qquad E_3'' = E_3' - 3E_2' \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

Triangular superior (U)

$Ax = b \iff Ux = b^*$

Resolución regresiva:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{U} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}}_{b^*} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} 3z = -3 \ ; \quad z = -1 \\ -y + 2(-1) = 1 \ ; \quad y = -3 \\ x + 2(-3) - 1(-1) = 1 \ ; \quad x = 6 \end{array}\right\} \ x = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b)

Al hacer GAUSS siempre hay una FACTORIZACIÓN LU IMPLÍCITA.

Los elementos de L son los mij calculados por Gauss en la eliminación.

Esto no se dio en la teoría, pero es muy importante.

$$Ax = b \xrightarrow{\text{GAUSS}} Ux = b^*$$

Factorización LU asociada:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ m_{21} & 0 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 0 \end{pmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{U} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}}_{A}$$

$$\left.\begin{array}{l} m_{21} = -1 \\ m_{31} = 2 \\ m_{32} = 3 \end{array}\right\} \longrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{U} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{b}$$

Para resolverlo $\rightarrow$ $LUx = b$ $\left\{\begin{array}{l} 1^{\circ})\ Ly = b \Rightarrow y \\ 2^{\circ})\ Ux = y \Rightarrow x \end{array}\right.$

* PROBLEMA 8 :

Sea el sistema lineal $Ax = b$ de orden n con A invertible.

a) Mostrar que el método de Jacobi equivale a usar como matriz del método iterativo:

$$B = I - D^{-1}A$$

b) Consideramos la siguiente variante de Jacobi expresada por:

$$D(x^{n+1} - x^n) = \omega(b - Ax^n) \quad \text{con } \omega > 0$$

Escribirlo de la forma $x^{n+1} = B_\omega x^n + C_\omega$

c) Estudiar la convergencia del método anterior (b) indicando el rango de valores de ω para los que converge, sabiendo que el método de Jacobi original (a) converge y que la relación entre los autovalores de ambas matrices es:

$$\lambda = \omega(\mu - 1) + 1 \quad / \ \omega \neq 0 \qquad \lambda \in \sigma(B_j) \quad \mu \in \sigma(B_\omega)$$

(a) Usamos nuestra descomposición habitual:

$$A = M - N \longrightarrow A = D - L - U \quad \begin{cases} M = D \\ N = L + U \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$L + U = D - A$$

$$B_j = D^{-1}(L+U) = D^{-1}(D - A) = D^{-1}\cdot D - D^{-1}\cdot A = \underline{\underline{I - D^{-1}A}}$$

(b) $D(x^{n+1} - x^n) = w(b - Ax^n) \longrightarrow x^{n+1} = B_w x^n + c_w$

$$D(x^{n+1} - x^n) = w(b - Ax^n) \quad \cdot D^{-1}$$

$$D^{-1}D(x^{n+1} - x^n) = D^{-1}w(b - Ax^n)$$

$$x^{n+1} - x^n = D^{-1}w(b - Ax^n) \;; \quad x^{n+1} = x^n + D^{-1}w(b - Ax^n) \;;$$

$$x^{n+1} = x^n + D^{-1}wb - D^{-1}wAx^n \;; \quad x^{n+1} = (I - D^{-1}wA)x^n + D^{-1}wb \;;$$

$$x^{n+1} = (D^{-1}D - D^{-1}wA)x^n + D^{-1}wb \;; \quad x^{n+1} = \underbrace{D^{-1}(D - wA)}_{B_w}x^n + \underbrace{D^{-1}wb}_{C_w}$$

$$x^{n+1} = B_w x^n + c_w \Longrightarrow \begin{cases} B_w = D^{-1}(D - wA) \\ C_w = D^{-1}wA \end{cases}$$

(c) $\left.\begin{array}{l} \text{Jacobi converge} \Rightarrow |\lambda| < 1 \\ \text{Jacobi' debe converger} \Rightarrow |\mu| < 1 \end{array}\right\}$

$$\lambda = w(\mu - 1) + 1 \rightarrow |w(\mu - 1) + 1| < 1 \;;$$

$$-1 < w(\mu - 1) + 1 < 1 \quad \begin{cases} -1 < w(\mu - 1) + 1 & (1) \\ w(\mu - 1) + 1 < 1 & (2) \end{cases}$$

Es < 0 porque $|\lambda| < 1$

$$\left.\begin{array}{ll} (1) \; -2 < w(\mu - 1) \;; & w < \dfrac{-2}{\mu - 1} \\ (2) \; w(\mu - 1) < 0 \;; & w > 0 \end{array}\right\} \quad 0 < w < \frac{-2}{\mu - 1}$$

Como $(\mu - 1)$ es < 0, para que la multiplicación sea < 0, w será $+$

(27/3/2008)

* PROBLEMA:

Dada la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & a & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 5-b^2 \end{pmatrix}$

a) Determinar los valores a y b para los cuales A admite una descomposición de la forma:

$$A = LDL^T \;/\; L = (l_{ij}),\; l_{ii} = 1$$
$$D = (d_{ij}),\; d_{ii} \neq 0$$

b) Calcular L y D.

c) ¿Para qué valores de a y b la matriz A admite descomposición de Cholesky?

d) ¿Cuál es el rango de valores de ω para que el sistema $Ax = b$ pueda resolverse por ω-relajación?

(a) $A = LDL^T$ => Para que A admita esta descomposición, debe ser SIMÉTRICA. Por tanto: $a = 2$.

La única información que tengo para hallar b es $d_{ii} \neq 0$:

- Factorizar
- Calcular d_{44} => b

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 5-b^2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{44} \end{pmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & l_{21} & l_{31} & l_{41} \\ 0 & 1 & l_{32} & l_{42} \\ 0 & 0 & 1 & l_{43} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{L^T}}_{\text{Multiplico}}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 5-b^2 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{pmatrix}}_{L \,/\, l_{ii}=1} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} d_{11} & d_{11} l_{21} & d_{11} l_{31} & d_{11} l_{41} \\ 0 & d_{22} & d_{22} l_{32} & d_{22} l_{42} \\ 0 & 0 & d_{33} & d_{33} l_{43} \\ 0 & 0 & 0 & d_{44} \end{pmatrix}}_{U \,/\, u_{ii} \neq 0}$$

Esta factorización LU se resuelve por DOOLITTLE.

1º (1ª FILA DE L) x (TODA U)

$d_{11} = a_{11} = 1 \Rightarrow d_{11} = 1$

$d_{11} \cdot l_{21} = a_{12}$; $1 \cdot l_{21} = -1 \Rightarrow l_{21} = -1$

$d_{11} \cdot l_{31} = a_{13}$; $1 \cdot l_{31} = 0 \Rightarrow l_{31} = 0$

$d_{11} \cdot l_{41} = a_{14}$; $1 \cdot l_{41} = 0 \Rightarrow l_{41} = 0$

2º (L - 1ª FILA) x (1ª COLUMNA DE U)

$d_{11} \cdot l_{21} = a_{21} \Rightarrow l_{21} = -1$

$d_{11} \cdot l_{31} = a_{31} \Rightarrow l_{31} = 0$ (Redundante)

$d_{11} \cdot l_{41} = a_{41} \Rightarrow l_{41} = 0$

3º (2ª FILA DE U) x (U - 1ª COLUMNA)

$d_{11} l_{21}^2 + d_{22} = a_{22}$; $1 \cdot (-1)^2 + d_{22} = 3 \Rightarrow d_{22} = 2$

$d_{11} l_{21} l_{31} + d_{22} l_{32} = a_{23}$; $1 \cdot (-1) \cdot 0 + 2 \cdot l_{32} = 2 \Rightarrow l_{32} = 1$

$d_{11} l_{21} l_{41} + d_{22} l_{42} = a_{24}$; $1 \cdot (-1) \cdot 0 + 2 \cdot l_{42} = 0 \Rightarrow l_{42} = 0$

4º (L - 1ª y 2ª FILA) x (2ª COLUMNA DE U).

(Redundante por ser simétrica)

5º (3ª FILA DE L) x (U - 1ª y 2ª COLUMNA)

$l_{31}^2 d_{11} + l_{32}^2 d_{22} + d_{33} = a_{33}$; $0^2 \cdot 1 + 1^2 \cdot 2 + d_{33} = 5 \Rightarrow d_{33} = 3$

$l_{31} d_{11} l_{41} + l_{32} d_{22} l_{42} + d_{33} l_{43} = a_{34}$; $0 \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot 2 \cdot 0 + 3 l_{43} = -3 \Rightarrow l_{43} = -1$

6º (L - 1ª, 2ª y 3ª FILA) x (3ª COLUMNA DE U)

(Redundante)

7º (4ª FILA DE L) x (U - 1ª, 2ª y 3ª COLUMNA)

$$d_{11} l_{41}^2 + d_{22} l_{42}^2 + d_{33} l_{43}^2 + d_{44} = a_{44};$$
$$1 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0^2 + 3(-1)^2 + d_{44} = 5 - b^4 \Rightarrow d_{44} = 2 - b^2$$

Por tanto, para que A admita esta descomposición:

$$A = LDL^T \begin{cases} A = A^T \Rightarrow \underline{a = 2} \\ d_{44} \neq 0;\ 2 - b^2 \neq 0;\ b^2 \neq 2 \Rightarrow \underline{|b| \neq \sqrt{2}} \end{cases}$$

(b) L y D se han calculado ya en el apartado anterior:

$$A = LDL^T \ / \ L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 3 & \\ & & & 5-b^2 \end{pmatrix}, |b| \neq \sqrt{2}$$

(c) Para que A admita descomposición de Cholesky debe cumplir:

* A simétrica $\Rightarrow A = A^T \Rightarrow \underline{a = 2}$

* A definida positiva $\Rightarrow$ CRITERIO DE STEVENS.

CHOLESKY: $A = L.L^T$

$$|a_{11}| = |1| > 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 > 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 6 > 0$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 5-b^2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -3 \\ 0 & -3 & 5-b^2 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & -3 & 5-b^2 \end{vmatrix} =$$

$$= 15(5-b^2) - 27 - 4(5-b^2) + (-5)(5-b^2) + 9 = -6b^2 + 12$$

$$|A| = -6b^2 + 12 > 0 \Rightarrow \underline{|b| < \sqrt{2}}$$

(d) Para que se pueda resolver por w-relajación $\Rightarrow$ $\underline{0 < w < 2}$

* EJERCICIO: EXAMEN ¡¡ TIENE TRUCO !!

Sea el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2k \\ 2k^2 & 1 & 2k^2 \\ -2k & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell \\ m \\ n \end{pmatrix} \quad \text{con } k, \ell, m, n \text{ enteros.}$$

a) Determinar los autovalores de la matriz de Jacobi para el sistema anterior.

b) Probar la convergencia del método diciendo si la condición es necesaria o necesaria y suficiente.

c) Sabiendo por el Teorema de Cayley-Hamilton que para la matriz de Jacobi obtenida anteriormente:

$$B^n = \Omega_{n \times n} \text{ (Matriz nula)} \quad n \geq 3$$

y que partiendo de cualquier punto de coordenadas enteras o no se llega a las soluciones del sistema en 3 pasos a lo sumo. Demostrar que dicha solución puede expresarse como:

$$As = b \Rightarrow s = A^{-1} b \Rightarrow s = (B^2 + B + I) b$$

donde: $b^T = (\ell, m, n)$ $\qquad x^3 = x^4 = \ldots = x^n = \ldots = S$

d) APLICACIÓN.- Para $k=1$ y $b^T=(0,0,3)$ obtener los primeros elementos al menos hasta x^4 de la sucesión generada por el método de Jacobi partiendo de $x^0 = (1, 0, 0'5)^T$

e) ¿Es también convergente para este caso de $k=1$ el método de Gauss-Seidel? Razonar la respuesta.

(a) Autovalores de Jacobi $\Rightarrow \lambda \in \sigma(B_j)$

Para hallar los autovalores no necesito calcular B_j. Utilizo la SIMPLIFICACIÓN DE JACOBI.

$|B_j - \lambda I| = 0 \Rightarrow \{\lambda_i\}$

$\Downarrow$

$$|\lambda D - L - U| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 2k \\ 2k^2 & \lambda & 2k^2 \\ -2k & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - \cancel{4k^3} + \cancel{4k^3} + \cancel{4k^2\lambda} - \cancel{2k^2\lambda} - \cancel{2k^2\lambda} = 0;$$

$\lambda^3 = 0$; $\lambda = 0$ TRIPLE

Los autovalores son: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

(b) Para que converja $\Rightarrow \rho(B_j) = \max_i |\lambda_i| < 1$

En nuestro caso: $\rho(B_j) = 0 < 1 \Rightarrow$ CONVERGE JACOBI.

(c) $B^n = \Omega_{n\times n}$ (Nula) $n \geq 3$

Se alcanza la solución en 3 pasos $\Rightarrow x^3 = x^4 = x^5 = \dots = s$

$s = (B^2 + B + I)b$

ECUACIÓN GENERAL $\rightarrow$ $x^{n+1} = Bx^n + C$

Siempre es lo mismo aunque le metan trucos...

x^0 ;

$x^1 = B_j x^0 + C_j$;

$x^2 = B_j x^1 + C_j = B_j(B_j x^0 + C_j) + C_j = B_j^2 x^0 + B_j C_j + C_j$;

$x^3 = B_j x^2 + C_j = B_j(B_j^2 x^0 + B_j C_j + C_j) + C_j = B_j^3 x^0 + B_j^2 C_j + B_j C_j + C_j$;

$B_j^3 = 0$ porque $B^n = \Omega_{n\times n}$ $n \geq 3$

$s = x^3 = B_j^2 C_j + B_j C_j + C_j$ donde $\left| \begin{array}{l} B_j = D^{-1}(L+U) \\ C_j = D^{-1} b \end{array} \right.$

Diagonal D del sistema / $d_{ii} = 1 \Rightarrow D^{-1}$ / $d_{ii} = 1 \Rightarrow C_j = b = C_j = Ib$

Sustituimos: $s = B_j^2 C_j + B_j C_j + C_j$;

$s = B^2 . b + Bb + Ib$; $s = (B^2 + B + I)b$ Queda demostrado.

d Hay que aplicar el ALGORITMO DE JACOBI para hallar los x^i:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad x^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0'5 \end{pmatrix}$$

ALGORITMO DE JACOBI $\rightarrow$ $x_i^{n+1} = \dfrac{b_i - \sum\limits_{i \neq j}^{n} a_{ij} x_j^n}{a_{ii}}$ $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\left. \begin{array}{l} x_1^1 = \dfrac{b_1 - a_{12}x_2^0 - a_{13}x_3^0}{a_{11}} = \dfrac{0 - 1.0 - 2.0'5}{1} = -1 \\[2ex] x_2^1 = \dfrac{b_2 - a_{21}x_1^0 - a_{23}x_3^0}{a_{22}} = \dfrac{0 - 2.1 - 2.0'5}{1} = -3 \\[2ex] x_3^1 = \dfrac{b_3 - a_{31}x_1^0 - a_{32}x_2^0}{a_{33}} = \dfrac{3 + 2.1 - 1.0}{1} = 5 \end{array} \right\} x^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$x_1^2 = \frac{b_1 - a_{12}x_2^1 - a_{13}x_3^1}{a_{11}} = \frac{0 - 1.(-3) - 2(5)}{1} = -7$$

$$x_2^2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1^1 - a_{23}x_3^1}{a_{22}} = \frac{0 - 2(-1) - 2(5)}{1} = -8$$

$$x_3^2 = \frac{b_3 - a_{31}x_1^1 - a_{32}x_2^1}{a_{33}} = \frac{3 - (-2)(-1) - 1(-3)}{1} = 4$$

$$x^2 = \begin{pmatrix} -7 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$x_1^3 = \frac{0 - 1(-8) - 2(4)}{1} = 0$$

$$x_2^3 = \frac{0 - 2(-7) - 2(4)}{1} = 6$$

$$x_3^3 = \frac{3 - (-2)(-7) - 1(-8)}{1} = -3$$

$$x^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$x_1^4 = \frac{0 - 1(6) - 2(-3)}{1} = 0$$

$$x_2^4 = \frac{0 - 2(0) - 2(-3)}{1} = 6$$

$$x_3^4 = \frac{3 - (-2)(0) - 1(6)}{1} = -3$$

$$x^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$x^3 = x^4 = x^5 = \ldots = S$$

(e) Tenemos la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como $A \neq A^T$ y no sabemos si es tridiagonal, miramos los autovalores.

SIMPLIFICACIÓN DE G-S $\rightarrow$ $|B_{GS} - \lambda I| = 0 \Rightarrow |\lambda D - \lambda L - U| = 0$

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 2 \\ 2\lambda & \lambda & 2 \\ -2\lambda & \lambda & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 4\lambda + 4\lambda^2 + \cancel{4\lambda^2} - \cancel{2\lambda^2} - \cancel{2\lambda^2} = \lambda^3 + 4\lambda^2 - 4\lambda = 0 \,;$$

$$\lambda(\lambda^2 + 4\lambda - 4) = 0 \quad \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -2 + 2\sqrt{2} \,, \quad \lambda_3 = -2 - 2\sqrt{2} \end{cases}$$

$\rho(B_{GS}) = \max_i |\lambda_i| = |-2 - 2\sqrt{2}| \simeq 4'8 > 0 \Rightarrow$ GAUSS-SEIDEL NO CONVERGE

* **PROBLEMA:** (Fotocopia)

Sea el sistema $Ax = b$ con $A = \begin{pmatrix} 2 & H & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. CONVERGENCIA DE JACOBI: $|B_j - \lambda I| = 0$

$$\begin{vmatrix} 2\lambda & H & 0 & 0 \\ 1 & 2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = 2\lambda(-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3\lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix} + H(-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3\lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = 0;$$

$$2\lambda(6\lambda^3 - 2\lambda) - H(3\lambda^2 - 1) = 0;$$

$$4\lambda^2(3\lambda^2 - 1) - H(3\lambda^2 - 1) = 0 \rightarrow (1) \searrow (2)$$

(1) $4\lambda^2 = H$; $\lambda^2 = \frac{H}{4}$; $\lambda_1 = \frac{\sqrt{H}}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{\sqrt{H}}{2}$ $(H > 0)$

(2) $3\lambda^2 - 1 = 0$; $3\lambda^2 = 1$; $\lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\lambda_4 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

CONVERGENCIA DE GAUSS-SEIDEL: $|B_{GS} - \lambda I| = 0$

$$\begin{vmatrix} 2\lambda & H & 0 & 0 \\ \lambda & 2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3\lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & \lambda \end{vmatrix} = 2\lambda(-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3\lambda & 1 \\ 0 & \lambda & \lambda \end{vmatrix} + H(-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3\lambda & 1 \\ 0 & \lambda & \lambda \end{vmatrix} = 0;$$

$$2\lambda(6\lambda^3 - 2\lambda^2) - H(3\lambda^3 - \lambda^2) = 0;$$

$$4\lambda^3(3\lambda - 1) - H\lambda^2(3\lambda - 1) = 0 \rightarrow (1) \searrow (2)$$

(1) $4\lambda^3 = H\lambda^2$; $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_3 = \frac{H}{4}$

(2) $3\lambda - 1 = 0$; $\lambda_4 = \frac{1}{3}$

$\rho(B_j) = \max\left\{\frac{\sqrt{|H|}}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$ $\rho(B_{GS}) = \max\left\{\frac{|H|}{4}, \frac{1}{3}\right\}$

$|0| < 1$ $\left|\frac{1}{\sqrt{3}}\right| < 1$ $|0| < 1$, $\left|\frac{1}{3}\right| < 0$

$\frac{\sqrt{|H|}}{2} < 1 \Rightarrow |H| < 4$ $\frac{|H|}{4} < 1$; $|H| < 4$ →

$$\begin{cases} \text{Si } |H| < 4 \Rightarrow \text{Ambos métodos convergen a la vez } (\rho(B_j))^2 = \rho(B_{GS}) \\ \text{Si } |H| \geq 4 \Rightarrow \text{Ambos métodos divergen.} \end{cases}$$

(2) $H = 1$ CON TRUCO!

Método $\rightarrow x^{n+1} = \underbrace{(I - aD^{-1}A)}_{B_a} x^n + \underbrace{aD^{-1}b}_{C_a}$

Si me ponen una matriz complicada para hallar sus autovalores, seguramente la podré simplificar de algún modo.

$$\left.\begin{array}{l} B_a = I - aD^{-1}A \\ C_a = aD^{-1}b \end{array}\right\}$$

$I = D^{-1} \cdot D$

$|B_a - \lambda I| = 0 \ ; \quad |I - aD^{-1}A - \lambda I| = 0 \ ;$

$|D^{-1}D - aD^{-1}A - \lambda D^{-1}D| = 0 \ ; \quad \underbrace{|D^{-1}|}_{\neq 0} \cdot |D - aA - \lambda D| = 0 \ ;$

$A = D - L - U$

$|D - a(D - L - U) - \lambda D| = 0 \ ;$

$|D - aD + aL + aU - \lambda D| = 0 \ ;$

$|(1 - a - \lambda)D + a(L + U)| = 0 \ ;$

$\% \ a$

$$\left| \underbrace{\left(\frac{1 - a - \lambda}{a}\right)}_{\mu} D + L + U \right| = 0 \ ;$$

$|\mu D + L + U| = 0$

$$\begin{vmatrix} 2\mu & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3\mu & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \mu \end{vmatrix} = 2\mu(-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 3\mu & 1 \\ 0 & 1 & \mu \end{vmatrix} + 1(-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3\mu & 1 \\ 0 & 1 & \mu \end{vmatrix} = 0 \ ;$$

$2\mu(6\mu^3 - 2\mu) - (3\mu^2 - 1) = 0 \ ;$

$4\mu^2(3\mu^2 - 1) - (3\mu^2 - 1) = 0 \ \rightarrow (1), (2)$

(1) $4\mu^2 = 1 \ ; \quad \mu_1 = \frac{1}{2} \ , \ \mu_2 = -\frac{1}{2}$

(2) $3\mu^2 - 1 = 0 \ ; \quad \mu_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \ , \ \mu_4 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

Obtenemos los autovalores de B_a:

$$\mu = \frac{1-a-\lambda}{a}$$

$$\mu_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda_1 = -\frac{3}{2}a + 1$$

$$\mu_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \lambda_2 = -\frac{1}{2}a + 1$$

$$\mu_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \lambda_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} - 1\right)a + 1$$

$$\mu_4 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \lambda_4 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - 1\right)a + 1$$

Para que converja debe ser < 1:

$$\left|-\frac{3}{2}a + 1\right| < 1 \Rightarrow a \in (0, 4/3)$$

$$\left|-\frac{1}{2}a + 1\right| < 1 \Rightarrow a \in (0, 4)$$

$$\left|\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - 1\right)a + 1\right| < 1 \Rightarrow a \in \left(0, \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}\right)$$

$$\left|\left(-\frac{1}{\sqrt{3}} - 1\right)a + 1\right| < 1 \Rightarrow a \in \left(0, \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}\right)$$

$$\rightarrow \quad a \in \left(0, \frac{4}{3}\right) \cap (0,4) \cap \left(0, \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}\right) \cap \left(0, \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}\right) = \left(0, \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}\right)$$

3 Resolver por Cholesky.

(Hecho en las fotocopias).